ספר המספר

לר׳ אברהם אבן עזרא ז״ל.

יוצא לאור פעם ראשונה

מתורגם ומפורש בלשון אשכנז

מאת

משה זילבערבערג.

נדפס מחדש ע״י הוצאת מקור בע״מ
ירושלים, תש״ל

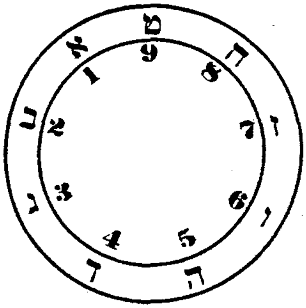
ראה[1] ספר מחוקק באמונה. ותמצא בו לכל מספר תכונה.
אשר חבר בנו מאיר למאיר. קטן שנים וחכם בתבונה:

ספר המספר[2]

בעבור כי השם הנשגב לבדו[3]) ברא בעולם[4]) העליון תשע עגלות גדולות סובבות את הארץ שהוא[5]) העולם השפל. ובעל ספר יצירה אמר כי נתיבות החכמה הם בִסְפָר וְסֵפֶר וְסִפּוּר. והנה הַסְּפָר תשעה מספרים כי תשעה סוף כל חשבון. ואלה יקראו האחדים[6]) שהם במעלה הראשונה. כי עשרה[7]) דומה לאחד ועשרים דומה לשנים שהם שני עשרות. והיה ראוי שיקראוהו עֶשְׂרַיִם[8]) כאשר יקראו ממאה מאתים ומאלף אַלְפַּיִם רק בעבור חבריו הבאים אחריו שהם שלשים עד תשעים נהגוהו[9]) כמנהגם[10]) והנה שלשים מגזרת שלש וככה כלם. והנה מאה דומה לאחד גם[11]) לעשרה ומאתים דומה[12]) לעשרים גם[11]) לשנים וככה אלף ורבבה שהם ראשי כללים למספרים הבאים אחריהם שהם א״ק׳ ב׳כ׳ר׳[13]). והאות על זה[14]) כשתעשה

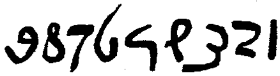
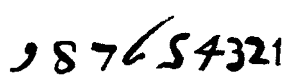
---

[1]) B beginnt mit den Initialbuchstaben עימיי עישיי (= עזרי מעם י״י עשה שמים וארץ Ps. 121,2) und ביה׳נ׳ו׳א׳ (= בעזרת השם נתחיל ונגמר אמן); M mit ליקי (= לישועתך קויתי י״י Gen. 49,18). Die oben stehenden Worte fehlen in M; in B stehen sie am Ende des Buches, ebenso in H, Medicea Plut. 88 Cod. 46 (vgl. Berliner, Magazin f. d. Wiss. d. Judent. I. 1874 S. 94). [2]) B: ס׳ יסוד מספר (s. Einleitung); M: אתחיל ספר המספר לר׳ אברהם אבן עזרא ז״ל, dann noch אמר; H und M 150 ohne Titel, jedoch H die Worte ראשית הספר. [3]) Vgl. Ps. 148,13, Jes. 2,11 u. 17 und den Anfang der 12. Pforte des יסוד מורא von A. i. E. [4]) M: העולם. [5]) Randnote in B: נ׳ שהיא (= נראה). [6]) M: אחדים. [7]) M: העשרה דומים. [8]) B im Texte: עֲשָׂרִים, in einer Randnote wie oben; H: עשרַיים; M: עשָׂרים (s. die Anm. zur Übersetzung). [9]) H, M: נהגו. [10]) H: במנהגם. [11]) M: ותם. [12]) H: דומים. [13]) M noch: ג׳ל׳ש׳; H noch: ג׳ל׳ש׳ ד׳מ׳ת׳ ה׳נ׳ך׳ ו׳ס׳ם׳ ז׳ע׳ן׳ ח׳פ׳ף׳ ט׳צ׳ץ׳. [14]) Randnote in B: ר״ל היות כל מספר; Randnote in M: פי׳ והאות על היות כל מספר סובב על ט׳ סובב על ט׳ והוא תכלית כל מספר כי כשתכפול ט׳ על כל המספרים שמא׳ ועד ט׳ לעולם המחובר ט׳ לפי מספר האותות הצורה . . . וזה א״ח וזה ב״ז ג״ו . . .



עגול ותכתוב סביבו תשעה מספרים ותכפול תשעה על עצמו והטעם להיותו[1]) מרובע ארכו כרחבו [0]תראה זה[2]) וככה הוא. והנה המרובע[3]) פ״א והנה האחד לשמאלו של תשעה שהוא ראש האחדים וח׳ שהוא כנגד שמונים בכלל לימין תשעה. ואם תכפול תשעה על שמונה יהיה המחובר ע״ב והנה ב׳[4]) לשמאלו וז׳ שהוא כנגד ע׳ לימינו. ואם תכפול ט׳ על ז׳ יהיה המחובר ס״ג והנה[5]) ג׳ לשמאלו ו׳[6]) שהוא[7]) כנגד ס׳ לימינו[7]). ואם תכפול ט׳ על ו׳ יהיה המחובר נ״ד והנה[8]) ד׳ לשמאלו וה׳ שהוא כנגד נ׳ לימינו. ובעבור כי חשבון[9]) חמשה הוא[10]) אמצעי בט׳ המספרים[11]) על כן נקרא [0]חשבון עגול[12]) כי הוא מתגלגל על עצמו כי מרובעו יש בו חמשה. וכאשר תכפול ט׳ על ה׳ יתגלגל הדבר בעגול כי האחדים יהיו לימין[13]) והכללים לשמאלו. כי המחובר הוא מ״ה והנה הה׳[14]) מפאת ימין ט׳[15]) והכללים לשמאלו שהוא ד׳ במקום המ׳[16]). וכאשר תכפול ט׳ על ד׳ יהיה המחובר ל״ו והנה ג׳ כנגד שלשים. וכאשר תכפול ט׳[17]) על ג׳ יהיה המחובר כ״ז והנה ב׳[18]) כנגד עשרים. וכאשר תכפול ט׳ על ב׳ יהיה המחובר י״ח והנה[19]) א׳ כנגד עשרה. על כן מאזני מספר[20]) שהוא כפול[21]) על עצמו או על [0]אחר הם[22]) ט׳[23]). על כן עשו חכמי הודו כל מספרם[24]) על תשעה ועשו צורות לט׳ מספרים[25]) והם[26]) [0]ואני

---

1) M: להיות. 2) H: f. 3) H noch: מהט׳. 4) H: הב׳. 5) H: ויהיה. 6) M: וד׳ (vgl. Einleitung über M). 7) H, M haben לימינו schon vor שהוא; in B ist es dort gestrichen und hinter ס׳ übergeschrieben. 8) H: ויהיה. 9) M: החשבון. 10) M: f. 11) H, M: מספרים. 12) H: עׄגׄוׄל חשׄבון; die Punkte deuten die richtige Wortfolge an. 13) M noch: ט׳. 14) M: ה׳. 15) H: הט׳ und noch: הוא. 16) H: מ׳, 17) M: f. 18) H: הב׳. 19) H: ויהיה. 20) M: המספר. 21) M: f. 22) M: אחד מהם. 23) M: f. 24) H: מספרים. 25) M: מספרם. 26) H: צורת כתיבת הדו ; M: צורת אנשי הודו (die Ziffern fehlen); B hat folgende Zifferformen: ; P 1052: צורה  בכתיבת הודו, ausserdem am Rande:  צורת אותיות הודו (Vgl. Anm. 19 und 20 zur Übersetzung).

כתבתי במקומם[1]) א׳ ב׳ ג׳ ד׳ ה׳ ו׳ ז׳ ח׳ ט׳. והנה לעולם אם[2]) יש בידך מספר באחדים לפני הכללים שהם העשרות[3]) יכתוב בתחלה[4]) מספר האחדים[5]) ואחר כך מספר הכללים[6]). ואם[7]) אין[7]) לו מספר באחדים[8]) ויש לו מספר במעלה השנית שהם העשרות[9]) ישים כדמות[10]) גלגל[11]) ○[12]) בראשונה[13]) להורות כי אין במעלה הראשונה מספר[14]) ויכתוב המספר[15]) שיש לו בעשרות[16]) אחריו. ואם הכלל שלו במאות[17]) ובעשרות[17]) יכתוב גלגל בראשונה ואחר כך מספר העשרות בשנית ומספר[18]) המאות בשלישית[19]) [0]ואם יש לו[20]) מספר[21]) אלפים ברביעית ומספר עשרת אלפים בחמישית ומספר מאות[22]) אלפים[22]) בששית. כי אייק׳ יחזור ברביעית[23]) לאלפים[23]) ובשביעית לאלף אלפים ובעשירית לאלף אלפי אלפים[24]) וככה[25]) עד אין קץ. ואם יש לו מספר אחדים ומאות ואין לו עשרות יכתוב מספר האחדים בראשונה וגלגל בשנית ומספר המאה בשלישית. ועל זה הדרך יעשה[26]) לשמור מעלות הגלגל לפי מעלות החשבון שיש לו

1) B: ובני ישראל די להם מאותיות התורה. 2) Randnote in B: אם כספרם אחדים ותחלת הכללים; H ebenso, nur כספרים statt כספרם; M: אם יש בידך מספר אחדים ותחלת הכללים; P 1052: אם יש מספרם אחדים בתחלה וכללים [Hierzu Rodet: „Le texte de ce passage était fautif dans les cinq manuscrits (P 1029, 1049, 1050, 1051, 1052) et l' on voit que chaque copiste a essayé de le restituer à sa façon; j' ai dû faire comme eux: ai-je été plus heureux? . . .] 3) H, M, P 1052: עשרות. 4) H: תחלה. 5) M: אחרים. 6) H, M, P 1052: הכלל. 7) M: ואין. 8) H, M, P 1052: האחדים. 9) M, P 1052: עשרות. 10) B, H, M: בדמות. 11) H, P 1052 noch: כזה. 12) M: f. 13) B: ראשונה; H, P 1052: f. 14) H: f. 15) M: מספר. 16) H: מן העשרות. 17) H: מן המאות ומהעשרות. 18) H: ואחר כך מספר. 19) M: בשלישי. 20) H: f. 21) H: ומספר. 22) H: מאת אלף. 23) B: לאלפים ברביעית (Die Punkte deuten die richtige Wortfolge an, vgl. S. 2 Note 12). 24) H noch: ובמעלת י״ג אלף אלפי אלפי אלפים. 25) M: f. 26) Von יעשה bis סיפרא ist in B durch lange Striche eingeklammert, dafür folgende Randnote: ס״א ועל זה הדרך ישים גלגלים בראשונה [ואחר] או באמצע או כפי מה שיצטרך עד אין חקר. H, M, M 150 haben auch letztere Lesart mit folgenden Abweichungen: nach ישים noch שנים, und H vor כפי noch am Rande ג׳ או ד׳; Terquem zu P 1050: „et de cette manière . . . [Le texte est interrompu. Il y a un renvoi à la marge où on lit d'une écriture différente du texte: „ . . . on fera pour le reste. On placera le galgal selon le besoin, soit au commencement, soit au milieu, et même deux galgals s'il le faut; la forme du galgal est celle ci $\overline{0}$ “.] Le galgal est comme la paille qui roule poussée par le vent; il n' est que pour conserver les degrés; en langue étrangère il se nomme sifra.“ P 1050 hat also die Lesart von B.

לשום גלגל בראשונה או שני גלגלים כפי מה שיצטרך לו בראש או באמצע. וזה הגלגל ○ וטעמו כגלגל בקש לפני רוח ואינו אלא לשמור המעלות ובלשון לעז שמו סִיפְרָא. ואחר שהזכרתי זה אזכיר שערי זה הספר ונאמר שהם[1]) שבעה:

השער הא׳ שער[2]) הכפל[3]). לכפול חשבון על עצמו או על אחר או לכפול[4]) חשבון אחד על שנים חשבונות או יותר או[5]) רבים על רבים:

השער הב׳ שער[6]) החלוק[7]). לחלק חשבון כלל על פרט או[8]) שנים[8]) כללים על פרט אחד או כללים גבוהים על כללים שפלים או[9]) כללים ופרטים על פרטים. גם אדבר על המאזנים של שער [0] הכפל והחלוק[10]):

השער הג׳ שער[11]) החבור[12]). לחבר[13]) מספר אל[14]) מספר פרט עם[15]) כלל או כלל עם[15]) כלל[16]):

השער הד׳ שער[17]) החסור[18]). לחסר[19]) מספר ממספר פרט[20]) מכלל[21]) או כלל מכלל. גם אדבר[22]) על מאזני שער החבור והמגרעת:

השער הה׳ שער[23]) השברים. והם על[24]) דרכים רבים. שלמים על[25]) שלמים ונשברים עמהם או שלמים ונשברים על[26]) שלמים ונשברים[27]) למיניהם או שברים על[28]) שברים או[29]) שברים[29]) על שברי שברים או שברי שברים על שברי שברים בין לכפול בין לחלק בין לחבר בין לגרוע ומאזניהם:

השער הו׳ שער[30]) הערכים[31]). והוא שער נכבד מאד כי ממנו יוכל[32]) האדם[33]) להוציא רובי השאלות הקשות ורוב הראיות מחכמת[34]) המזלות יצאו מן[35]) הערך[36]):

השער הז׳[37]) שער[38]) השרשים[39]) המרובעים. וכל[40])

---

[1]) H: כי הם. [2]) H, M: f. [3]) H, M: f; B am Rande noch: מולטיפליקארי = multiplicare. [4]) H, M: כפל. [5]) H, M noch: כפל חשבונות. [6]) H M: f. [7]) H, M: f; B am Rande noch: פארטירי = partire. [8]) H, M: ושנים. [9]) M: f. [10]) H, M 150: החלוק והכפל. [11]) H, M: f. [12]) H, M: f; B am Rande noch: סומארי = summare. [13]) H, M: בחבור. [14]) H, M: על. [15]) H: על. [16]) M: פרט. [17]) H, M: f. [18]) H, M: f; B am Rande noch: סוטראריי = subtrahere. [19]) M: לחסר. [20]) H, M 150 noch: או. [21]) M: f. [22]) H, M 150: f. [23]) H, M: על. [24]) M: f. [25]) H, B: עם; B am Rande: ב׳ על. [26]) H, B, M: עם; B am Rande: על [27]) H noch: הם; M: ונשבריהם, [28]) H, M: עם. [29]) M: f. [30]) H, M: f. [31]) H: בערכים; M: בערכין. [32]) H, M: נוכל. [33]) H, M: f. [34]) M: מחכמות. [35]) H, M, Randnote in B: מזה. [36]) M: השער. [37]) M noch: והוא שער נכבד מאד כי ממנו נוכל להוציא (wie oben, vgl. Note 32). [38]) H, M: f. [39]) H, M: על שרשי. [40]) H, M: f.

המאזנים[1]) שלהם כי רבים[2]) הם[2]). וחכמת המדות תלויה בשער[3]) הזה[3]) והוא[4]) חמור מכל השערים. ואין כח במשכיל לדעת קדרות המאורות אם לא ילמד זה השער. ויתרי[5]) קשתי[6]) העגול יצאו מהשער הזה:

השער הא'[7])

כבר הזכרתי לך[8]) איך הם מעלות המספר והנה כשיבואו[9]) לך שנים[10]) מספרים לכפול כלל על[11]) כלל בין שיהיה[12]) על עצמו [0]כמו ב' על ב'[12]) או[13]) על אחר [0]כמו ב' על ל'[12]) בקש[14]) דמיונו במעלה הראשונה וראה כמה המחובר מכפל זה על זה ושמור אותו ואחר כך ראה כמה מעלות שני החשבונות בין שיהיו[15]) במעלה אחת או בשתים[16]) מעלות ודע כמה המחובר ממספר[17]) שתי[18]) המעלות וגרע לעולם אחד למוסד ובקש במספר[19]) המעלה הנשאר במספר השמור. ועוד אדבר על טעם המוסד[20]) בדברי על סוד האחד בע"ה. דמיון רצינו לכפול שלשים על מאתים. והנה[21]) דמיון שלשים[22]) שלשה ודמיון מאתים שנים כפלנו ב' על ג' והנה עלו[23]) ששה וזהו החשבון השמור ונשוב לבקש המעלות והנה שלשים מהמעלה[24]) השנית שהם עשרות והנה נקח לו שנים[25]) ובעבור כי המאתים מהמעלה השלישית שהם[26]) מאות נקח לו שלשה[27]) ונחבר עליו השנים[28]) ויהיו חמשה נחסר[29]) אחד למוסד ישארו ארבעה[30]) וכבר ידענו[31]) כי המעלה הרביעית היא לאלף[32]) והמספר השמור היה ששה והנה העולה ששת אלפים[33]). דמיון אחר בקשנו לכפול מאתים על שבע[34]) מאות והנה כפלנו שנים על שבעה והנה[35]) עלו[36]) י"ד והוא השמור והנה מאתים מהמעלה השלישית וז' מאות ג"כ[37]) מהמעלה[38]) השלישית[39]) נקח להם ששה

---

1) H, M: והמאזנים. 2) H, M: הם רבים. 3) H: בשער זה; M: בזה השער. 4) H, M: וזה השער. 5) M: ויתר ידוע. 6) M noch: זה. 7) H: הראשון. 8) H, M: f; in B übergeschrieben. 9) H: כשיבאו. 10) H: שני. 11) M: עם. 12) H: f. 13) H: בין. 14) in B übergeschrieben. 15) H, M: שיהיה. 16) H: בשתי. 17) M: במספר. 18) H: שני. 19) M: למספר. 20) B am Rande noch: בסוף הספר. 21) H: הנה. 22) M: שלשה. 23) H: יעלו. 24) H: ממעלה. 25) H: ב' מעלות. 26) H, M: כי הם. 27) H: ג' מעלות. 28) M: שנים. 29) H: ונחסר. 30) H: ארבע. 31) H: הזכרנו. 32) H: לאלפים. 33) H noch: כזו הצורה. 34) M: ת"ש (dann noch מאות). 35) H: והוא. 36) H, M: f. 37) M: hier f. 38) H: f. 39) M hier noch: ג"כ; H: מהשלישית.

30
200
6000

נחסר[1]) אחד למוסד[2]) הנה[3]) חמשה וראש המעלה החמשית[4]) עשרת אלפים והשמור היה[5]) י״ד הנה[2]) נקח במספר הזה עשרת אלפים ויהיה העולה [0] מאת אלף ומ׳[6] אלף ועל[7]) זה הסדר תוכל לעשות עד אין קץ.

ואם היו שנים[8]) מספרים[9]) מרחקם מחשבון[10]) כלל[11]) כמרחק שנים מספרים אחרים[12]) רק האחד[13]) במגרעת והשני בתוספת דע כמה[14]) מרובע[15]) מספר הכלל ונרע ממנו לעולם[16]) מרובע החשבון היתר והחסר והנשאר הוא[17]) המבוקש. **דמיון** רצינו לכפול כ״ט על ל״א והנה חשבון הכלל הוא[18]) שלשים ומרובעו[19]) ט׳ מאות כי שלשה על שלשה[20]) תשעה [0] והחסרון היתרון[21]) הוא אחד ומרובעו[22]) אחד נחסרנו[23]) ממרובע הכלל והנשאר הוא המבוקש [0] והוא תתצ״ט[24]). **דמיון** אחר רצינו לכפול ס״ו על נ״ד והנה חשבון הכלל ס׳ והחסרון והיתרון[25]) ששה[26]) והנה מרובע הכלל ג׳ אלפים ת״ר[27]) נחסר ממנו ל״ו שהוא מרובע החסרון והיתרון והנה[28]) הנשאר[29]) הוא המבוקש [0] והוא ג׳ אלפים תקס״ד[28]). **דמיון** אחר[30]) המספר האחד ר״נ והמספר האחר[31]) ש״נ הנה[32]) הכלל[33]) הוא ש׳ ומרובעו[34]) צ׳ אלף נחסר ממנו מרובע נ׳ שהוא[35]) מרובע החסרון והיתרון ומספרו אלפים ת״ק[36]) והנשאר הוא המבוקש. ועל זה הסדר נוכל[37]) לעשות שאר המספרים הדומים לאלה[38]) שהחסרון[39]) והיתרון שוים[40]).

דרך אחרת נכבדת[41]) שהוצאתי בדרך השלישיות[42]) שנקח שלישית החשבון ונדע כמה מרובעו ונקח כמוהו בכלל הגבוה ממנו ונחסר מרובע[43]) השלישית ממנו והנשאר הוא המבוקש. **דמיון** בקשנו לדעת כמה מספר

---

1) H noch: להם. 2) M: f. 3) H: והנה נשאר. 4) H: החכישית מעלת הרבואות. 5) M: הוא. 6) M: מאה אלפים וארבעים. 7) H: והנה על, vorher noch: כזו הצורה u. Fig. 1. 8) H: השנים. 9) in B am Rande zugeschrieben. 10) M: חשבון. 11) H: f. 12) M: ר״ל במרחקים הם אחרים שמרחק׳ מהכלל שוים und noch אחרים ואחרים. 13) M: אחד. 14) M: f; in B stand erst כי, dies ist gestrichen und כמה übergeschrieben. 15) B: f. 16) in B übergeschrieben. 17) H noch: חשבון; M noch: החשבון; in B ist החשבון gestrichen. 18) M: הם. 19) H: ומרובע ל׳ פי׳ ל׳ פעמים ל׳ הם. 20) H, M noch: הם. 21) B: והיתרון והחסרון. 22) H noch: הוא. 23) H: חסרנום; M: חסרונם (sic). 24) M: f; H: והוא על צורת ז 25) H, M noch: הוא. 26) H: ו׳ ו׳. 27) H, M: ות״ר. 28) H, M: f. 29) H, M: והנשאר, H noch: Fig. 2. 30) M noch: רצינו לכפול. 31) H: השני. 32) H, M: והנה. 33) B: מהכלל. 34) H: והמרובע. 35) H: והוא. 36) H, M: ות״ק. 37) H, M: תוכל. 38) H: לאלו. 39) H, M, wie ס״א (s. Note 40), H aber: בשיהיה החסרון. 40) Randnote in B: כמו היתרון ס״א כי החסרון. 41) H. noch: מצאתי. 42) H, M: השלישית. 43) M noch: מרובע (doppelt).

200
700
140000

Fig. 1

899

מרובע הכלל
3600
3564

Fig. 2

מרובע ג' נקח שלישיתו[1]) שהוא אחד ומרובעו[2]) אחד והוא עשרה שהוא הכלל הקרוב אליו נחסר ממנו [0]אחד שהוא מרובע[3]) השלישית וישאר ט' והוא המבוקש. דמיון אחר בקשנו לדעת מרובע ט"ו ושלישיתו ה' ומרובעו כ"ה והדומה בכלל הקרוב אליו[4]) ר"נ חסר[5]) ממנו [0]מרובע ה' שהוא[6]) כ"ה[7]) [0]ישאר רכ"ה[8]). דמיון אחר בקשנו לדעת כמה מרובע כ"ד הנה שלישיתו ח' ומרובעו ס"ד ודמיונו במעלה הגבוהה ממנו תר"מ נחסר[9]) ממנו[10]) מרובע השלישית שהוא ס"ד ישאר תקע"ו והוא המבוקש.

ואם לא היה למספר שלישית שלמה ויהיה בו תוספת אחד חסר האחד מהמספר ותציא[11]) המספר[12]) המבוקש כמשפט שהראיתיך ומה שיעלה[13]) הוסף עליו המספר שיש[14]) לו שלישית והמספר בעצמו והמחובר הוא המבוקש. דמיון בקשנו לדעת מרובע ז' והנה אין לו שלישית חסרנו ממנו אחד שהוא נוסף[15]) והנה שלישית[16]) הנשאר שנים ומרבעו ארבע[17]) והנה בכלל[18]) הקרוב הדומה לו[19]) מ' נחסר ממנו ד' שהוא מרובע השלישית וישאר ל"ו שהוא מרובע ו'[20]) נחבר[21]) אליו הו' שיש לו שלישית והז' שהיה מספרנו בראשונה ושניהם י"ג יהיה המחובר מ"ט והוא מרובע[22]) ז'. דמיון אחר רצינו לדעת כמה מרובע כ"ב והנה חסרנו אחד ונשאר כ"א ושלישיתו ז' ומרובעו מ"ט והנה[23]) בכלל הקרוב אליו ת"צ נחסר[24]) ממנו מ"ט שהוא מרובע[25]) השלישית נשארו תמ"א שהוא מרובע כ"א נוסיף כ"א גם כ"ב מחוברים[26]) שהם[27]) מ"ג[28]) יעלה המחובר תפ"ד וזהו[29]) מרובע[30]) כ"ב.

ואם היו שנים בין המספר[31]) שלנו ובין[28]) המספר[32]) שיש לו שלישית נעשה להפך שנוסיף על המספר שלנו אחד ונדע כמה מרובע המספר[33]) שיש לו שלישית[34]) ונחסר ממנו כמספר[35]) שיש לו שלישית וכמספר שהיה לנו והנשאר הוא המבוקש. דמיון בקשנו לדעת כמה מרובע כ"ג והנה בעבור שאין לו שלישית שלמה[36]) נוסיף לו[37]) אחד יהיו[38]) כ"ד

---

1) M: שלישית. 2) H noch: שהוא. 3) H, M: מרובע אחד שהוא; in B stand nach מרובע noch einmal שהוא, ist aber gestrichen. 4) H noch: הוא; M: f. 5) H: נחסר. 6) H: f; M nach שהוא noch: השלישית וישאר. 7) H noch: שהוא מרובע השלישית. 8) M: f; H noch: על צורת ז והוא המבוקש. 9) H: תחסר; M: וחסר. 10) H: f. 11) H: והוצא. 12) H: האחר. 13) H am Rande noch: (הוסף) תחסר ממנו מרבע השלישית ו. 14) B: שיהיה. 15) M noch: ממנו. 16) M: השלישית. 17) M: ארבעה. 18) H: הכלל. 19) H, M: אליו, ebenso Randnote in B: ג' אליו. 20) H: f. 21) M: ונחבר. 22) M: המרובע. 23) H noch: יהיה. 24) M: ונחסר. 25) M noch: ד'. 26) M: f; H: מחוברין. 27) M: f; H: והם יעלו. 28) M: f. 29) H: וזה. 30) M: המרובע. 31) M: המספרים. 32) M: ומספר. 33) H, M: מספר. 34) H noch: וכמספר שהיה לנו (s. weiter). 35) in B übergeschrieben; M: גם המספר. 36) B, H: שלימה. 37) H: f. 38) H: ויהיו. 225

ושלישיתו ח׳ ומרובעו ס״ד[1]) [0]וההרומה לו[2]) תר״מ נחסר ממנו ס״ד שהוא מרובע השלישית ישאר תקע״ו והוא מרובע כ״ד [0]גם נחסר מזה המספר מ״ז שהוא כ״ד עם כ״ג מחוברים[2]) ויהיה הנשאר תקכ״ט והוא המבוקש.

ודע כי אם היו[3]) שנים מספרים לכפול זה על זה יספיק לך פעם אחת ואם היה[4]) מספר אחד על שני מספרים[2]) אתה צריך לעשות זה פעמים[5]) ואם על[2]) שלשה[6]) שלש על זה המשפט הכל ואם היו[7]) שני מספרים על שני מספרים אתה צריך לעשות זה ד׳ פעמים. דמיון רצינו לכפול י״ג על כ״ח הנה כפלנו י׳ על כ׳ שהוא כלל עלו[2]) ר׳[2]) ועוד[8]) י׳[2]) על ח׳ עלו[9]) [0]פ׳ הנה[2]) ר״פ ואחר[8]) כפלנו ג׳ על כ׳ [0]וגם על[10]) ח׳ עלו[11]) פ״ד והנה[12]) הכל שס״ד[13]). אם[14]) היה כלל אחד כולל שני המספרים[15]) די לך בב׳ פעמים. דמיון בקשנו לכפול י״ג על י״ו והנה[16]) י׳ כולל שני המספרים והנה חברנו[17]) ג׳ על ו׳ עלו[18]) ט׳ והנה יהיה מספרם י״ט וכפול אותו [0]על י׳[19]) עלו[20]) ק״צ נכפול שנים המספרים הקטנים שהם ג׳ על ו׳ יעלו י״ח והנה הכל ר״ח[21]). ויש[22]) שיספיק לך פעמים לבדם. דמיון בקשנו לכפול חשבון כ״ד[23]) על כ״ו[24]) הנה כ׳ כולל שני המספרים וחברנו[25]) ד׳ עם[26]) כ״ו שהוא הגדול עלה[27]) המספר[28]) ל׳ כפלנו[29]) כ׳ על ל׳ עלו[20]) ת״ר וכפלנו[30]) הקטנים זה על זה[31]) עלו[20]) כ״ד והנה[32]) המחובר[33]) תרכ״ד[34]). ואם תכפול ג׳ מספרים על ג׳ אתה צריך לעשות זה ט׳ פעמים ועל זה הסדר כל החשבון. וראה אם המספר אחד או רבים [0]אם יהיה[35]) מספר זוג גם המחובר יהיה זוג וטעם הזוג הוא באחדים כי כל כלל זוג הוא. ואם היה[28]) המספר האחד זוג והשני נפרד והטעם שאינו[36]) זוג איזה מהם שיהיה גם המחובר יהיה זוג. ואם המספר[28]) האחד נפרד וג״כ[37]) האחר גם המחובר יהיה נפרד. ודע כי אם היו[38]) המספרים הנכפלים אלה על אלה

---

[1]) H noch: שהוא מרובע השלישית נחסר ממנו מספר כ״ד וכ״ג שיעלה מ״ז
[2]) H: f. [3]) H: יהיו. [4]) H noch: לך. [5]) H: פעמיים. [6]) In B stand dies erst nach ואם, ist dort gestrichen und hier übergeschrieben. [7]) H: הם; in B ist הם gestrichen und היו übergeschrieben. [8]) H: גם. [9]) H: ועלו. [10]) H: ועל. [11]) H: ויעלו. [12]) H: ויהיה. [13]) H noch: כזו הצורה u. Fig. 1. [14]) H: ואם. [15]) H: מספרים. [16]) H: הנה. [17]) H: נחבר. [18]) H: ועלו. [19]) H: בעשרות. [20]) H: יעלו. [21]) H noch: כזו הצורה u. Fig. 2. [22]) H: והנה יש. [23]) H: כ״ו. [24]) H: כ״ד. [25]) H: חברנו. [26]) H: אל. [27]) H: יעלה. [28]) H: f. [29]) H: נכפול. [30]) H: ונכפול. [31]) H noch: דהיינו ד׳ על ו׳. [32]) H: הנה. [33]) H: המבוקש. [34]) H noch: כזו הצורה u. Fig. 3. [35]) H: והוא. [36]) H. שאיננו. [37]) B: ג״כ. [38]) H: יהיו.

Fig. 1

	13
	28
364	

Fig. 2

13
16
208

Fig. 3

26
24
624

רבים אתה צריך לכפול אותם במכתב ט׳ אותיות שהראיתיך. והדרך הסלולה שתשים טורי המספר המעט עליונים[1]) ופי׳ המעט בחשבון הכלל ולא תהוש מן הפרטים ותשים בטור אחר[2]) שפל למטה החשבון שהוא כללו גדול ואם החשבון שכללו קטן הם יותר מספרים מחשבון שכללו גדול שים אותם עליונים ולא תחוש ואלו[3]) היית עושה להפך לא יזיק רק יתבלבל מעט על התלמיד. ואחר שתשים המספרים כמה שיהיו בטור העליון והאחרים בטור השפל כפול הראשון של הטור[4]) העליון על הראשון שבטור[5]) השפל והעולה כתוב אותו למטה [0]כנגד הטור הראשון העליון בטור שלישי[6]) ואח״כ כפול המספר הראשון[6]) העליון על המספר השני השפל וכתוב בטור השלישי כנגד המספר השני העליון וככה לכל המספרים השפלים עם המספר העליון הראשון[7]). ואם כאשר תכפול הראשון העליון על שכנגדו בשפל יתחבר[8]) במספר כלל ופרט תכתוב הפרט במקום הראוי לו והכלל במספרו תכתבנו במספר[9]) שהוא אחריו. ואחר שתשלים לכפול החשבון הראשון של הטור[4]) העליון על כל מספרי הטור השפל תחל לכפול המספר השני של הטור[4]) העליון על מספר הראשון של הטור[4]) השפל והעולה כתבהו בטור השלישי כנגד השני העליון ואח״כ תכפול[10]) השני שבטור[6]) העליון על שני שבטור השפל ותכתבהו בטור השלישי במספר השלישי שהוא שני למספר שהתחלת[11]) עתה ממנו ואח״כ תחל במספר השלישי[12]) העליון לכפול אותו על ראשון שבטור השפל והעולה תכתבהו כנגד טור השלישי [0]אשר החילות[11]) ממנו וככה המשפט[13]) לכלם עד אין קץ עם משפט הפרט להיות התחתון[14]) והכלל שיבא[15]) אחריו בטור השני לו. ואם היה גלגל[16]) בין בטור[17]) העליון בין[18]) בטור[17]) השפל משפטו לכתבו במקום[19]) הראוי לו במשפט כל המספרים שעליו[20]). ואח״כ תחל לחבר מה שעלה בטור העליון עם השפל אם אין בו עשרות[21]) תכתוב מה שהוא בחבור ואם יש בו עשרה כתוב אחד אחריו[22]) ואם יש בו יותר כתוב היותר

---

1) H: העליונים. 2) H: אַחֵר. 3) H: ואילו. 4) H: טור. 5) H: בטור. 6) H: f. 7) M noch: על שלשה מספרים קכ״ז על דמיון שלשה מספרים שנ״ה נכפול הק׳ על ש׳ ואחר על נ׳ ואחר על ה׳ ונשוב לכפול כ׳ על שלשתם וכן ז׳ על כלם וכן ד׳ על ד׳ ועם העליון הראשון. 8) H: ויתחבר. 9) H: בחשבון. 10) in B übergeschrieben. 11) H: שהחלות 12) H noch: בטור. 13) H: משפט. 14) M noch: עם ר״ל במדרגת. 15) H: הבא. 16) M noch: ר״ל בשתכה גלגל באות או אות בגלגל כתוב הגלגל להוסיף מדרגה כדרך שתעשה במספרים. 17) H: טור. 18) H: ובין. 19) H: בטור. 20) M noch: ושאחריו; in B ist ואחריו gestrichen. 21) H: עשיריות. 22) M noch: ר״ל אחרי מקום החבור או ר״ל יכתוב ספרא וישמור אחד ויחברהו עם מה שבא אחריו. Ferner hat

מבחוץ בחבור שיש לך ובמקום העשרה כתוב אחד[1]) שני[2]) לו נוסף וכן תעשה לכל היוצאים מהטור[3]) העליון והשפל[4]) והוצא הנותר מעשרות מבחוץ. ואחר שידעת כמה הוא המחובר בטור השלישי ספור מעלותיו וראה אם היו כמספר[5]) מעלות השנים טורים העליונים ממנו בחסרון אחד[6]) תדע כי חשבונך אמת. ואם[7]) המספר האחרון בטור העליון הנכפל במספר האחרון בטור השפל ממנו יוצא אל כלל יהיה מספר מעלות הטור[8]) השלישי כמספר[5]) שני טורים העליונים בלי מגרעת אחד[9]).

זבא
ההג
הגגבג
האא
או
הה
החסהד

דמיון[10]) זה[11]) רצינו לכפול קכ״ז[12]) על שנ״ה וכתבנו[13]) [0]קכ״ז בטור העליון[14]) [0]כזה ומספר[15]) [0]שנ״ה תחתיו[16]) [0]אות אות במקומו[17])

M hier folgende Figuren:

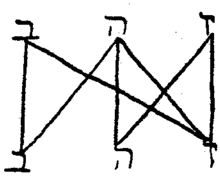


Fig. 1.

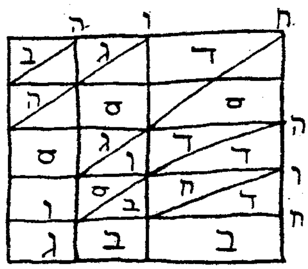


Fig. 2.

[1]) in B übergeschrieben: אותו. [2]) H: שיש. [3]) H: מן הטור. [4]) H: והטור השפל [5]) H: במספר. [6]) H: האחד. [7]) H noch: היה. [8]) H: טור. [9]) In H, M 150 u. P 1052 folgt hier ובחן bis טעית (s. gegen Ende dieser Pforte) mit den dort angegebenen Varianten, dann erst דמיון. In M fehlt das Folgende bis ובחן ganz. [10]) P 1052: f. [11]) H u. M 150: f; P 1052: הנה. [12]) steht in M 150 am Rande, im Texte ק״ע. [13]) H: נכתוב; M 150 u. P 1052: וכתוב. [14]) H, M 150, P 1052: בטור העליון קכ״ז. [15]) H, M 150, P 1052: f. In M 150 fehlt die Figur; in B am Rande findet sich noch die (fehlerhafte) Figur 3. In P 1052 (Rodet S. 4) finden sich die Figuren 4 u. 5. [16]) H u. M 150: ובשני; P 1052: ובטור השני. Dann haben H, M 150, P 1052 noch: כזו הצורה. [17]) H, M 150, P 1052: f.

127
355
32335
225
620
55
45085

Fig. 3

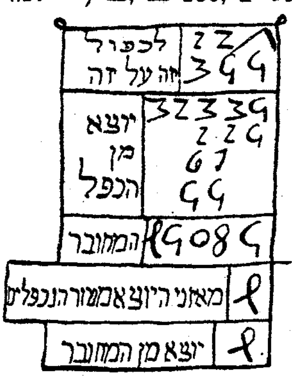


Fig. 4.

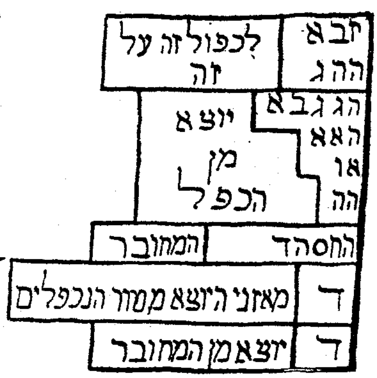


Fig 5.

כפלנו[1]) ז׳ על ה׳ עלו[2]) ל״ה כתבנו[3]) ה׳ במעלה הראשונה וג׳ [0]שהוא ל׳[4]) במעלה[5]) השניה[6]) עוד כפלנו[7]) ז׳ העליון[5]) על ה׳ השני[8]) התחתון[5]) עלו ל״ה [0]כתבנו ה׳[9]) במעלה השנית תחת ג׳[10]) וג׳ בשלישית עוד כפלנו[11]) ז׳ הראשון על ג׳ התחתון עלו כ״א כתבנו[12]) א׳ בשלישית תחת ג׳[13]) וב׳ ברביעית עוד כפלנו[11]) ב׳ האמצעי העליון[14]) על [0]ה׳ הראשון[15]) מן[16]) התחתון עלו י׳ כתבנו[12]) א׳ בשלישית תחת[17]) הא׳[18]) עוד[19]) כפלנו[20]) ב׳ העליון על ה׳ השנית[21]) התחתון [0]היו ג״כ[22]) י׳ כתבנו[23]) א׳ [0]תחת ב׳ ברביעית[24]) עוד כפלנו[20]) ב׳ העליון[25]) על ג׳ התחתון[26]) והיו[27]) ו׳ כתבנו[28]) אותו[29]) [0]תחת א׳ ברביעית[30]) עוד[31]) כפלנו[32]) א׳ [0]העליון האחרון[33]) על ה׳ הראשון[34]) התחתון[35]) עלו ה׳[36]) כתבנוהו[37]) בשלישית[38]) עוד כפלנו[39]) א׳[40]) על ה׳ השני[41]) התחתון עלו ה׳ כתבנוהו[42]) ברביעית[43]) עוד כפלנו[39]) א׳ העליון על ג׳[44]) התחתון[45]) היו[46]) ג׳ כתבנוהו[47]) בחמישית[48]) אחר ב׳[49]) [0]והנה נשלם[50]) הכפל[51]).
חברנו[52]) כל אלו[53]) המספרים כל[54]) מה שהוא ממעלה[55]) אחת יחד[56])

1) H, M 150, P 1052: נכפול. 2) H u. M 150: ויהיו; P 1052: יהיה. 3) H, M 150, P 1052: תכתוב. 4) H, M 150, P 1052 (Rodet S. 4 im Facsimile): f; steht aber Rodet S. 10. 5) H, M 150, P 1052: f. 6) H, M 150, P 1052: בשנית. 7) ebenso P 1052; H, M 150: תכפול; Rodet S. 10: נכפול (s. Anm. 1). 8) H u. M 150: אחרת; R. S. 10: אחרית. 9) H, M 150, R: כתוב הה׳. 10) H, M 150, R: הג׳. 11) H, M 150, R: תכפול. 12) H, M 150, R: כתוב. 13) R: הג׳. 14) R: בעליון. 15) H: ראשונה; ה׳ f; M 150: ה׳ ראשונה. 16) H u. M 150 noch: הטור; R: שבטור. 17) R: f. 18) H: ג׳; M 150: ה׳; R: f. 19) In M 150 fehlt das folgende Stück von עוד bis עוד; dasselbe fehlt im Texte in H, ist aber am Rande mit den folgenden Varianten ergänzt. 20) R, H: תכפול. 21) H: האמצעי; R noch: שבטור; H noch: מן הטור. 22) H: עלו; ג״כ f. R: עלו גם כן. 23) R, H: כתוב. 24) R: תחת ב׳ f; H: ברביעית תחת הב׳. 25) H: האמצעי מן הטור הראשון. 26) R: האחרון. 27) H: עלו; R: יצאו. 28) H: כתבהו; R: כתוב ו׳. 29) H u. R: f. 30) H: ברביעית תחת הא׳; R: תחת א׳ f. 31) R: אחר כן. 32) H, M 150, R: תכפול. 33) R האחרון מן העליון. 34) H u. M 150 noch: מטור; R noch: של ראש הטור. 35) R: השני. 36) M 150: f. 37) H u. M 150: כתבהו; R: כתוב הה׳. 38) M 150: בשלישי; R: במעלה השלישית. 39) H u. M 150: כפול; R: תכפול. 40) H, M 150, R noch: העליון. 41) H: האמצעי übergeschrieben und noch: מהטור; M 150: מהטור; R: מטור. 42) H: כתבהו; M 150 u. R: כתבנו. 43) H, M 150, R noch: תחת הב׳. 44) H u. M 150 noch: מהטור; R: מטור. 45) M 150: העליון. 46) H, M 150, R: עלו. 47) H, M 150, R: כתבהו. 48) M 150: בחמישי. 49) H, M 150, R: הב׳. 50) H u. M 150: f. 51) H u. M 150: f; R: הכפול. 52) H, M 150, R: חבר. 53) H: אלה. 54) H, M: 150, R: וכל. 55) H, M 150, R: במעלה.. 56) H, M 150, R: תחבר.

הכל ומה שיעלה יותר מעשרה או עשרה[1]) כתבהו אחר המעלה ההיא[2]) ויעלה[3]) המחובר מ״ה אלפים ופ״ה[4]).

ובחן באחרונה במאזנים[5]). וככה תעשה חשוב כל חשבון שתמצא בטור העליון באיזו מעלה שיהיה כאילו הם אחדים וחברם והוצא המחובר ט׳ ט׳ אם יותר[6]) ט׳[7]) או פחות ממנו כתוב אותו לבדו והוא מאזני הטור העליון ככה[8]) תעשה למאזני הטור השפל עד שתדע כמה המאזנים[9]) שלו וכפול מאזני הטור העליון על מאזני הטור השפל[10]) והנכפל תוציאהו[11]) ט׳ ט׳ והנשאר יהיה עמך שמור ואם מאזני אחד מהטורים יהיה ט׳ אל תייגע עצמך לבקש מאזני הטור האחר כי ט׳ יצא לעולם ואחר בדוק מאזני הטור השלישי וראה אם היה [0]שוה לשמור חשבונך[12]) אמת[13]) ואם לאו [0]הנה טעית[14]):

השער הב׳

דע כי כל חשבון הוא חברת אחדים[15]) והאחד[16]) לבדו לא יקבל לא[17]) שנוי ולא רבוי ולא חלוק והוא סבת כל רבוי ושנוי וחלוק[18]) והאחד קדמון לבדו וכל חשבון[19]) מתחדש בעבורו. והוא יעשה בפאה אחת מה שיעשה כל חשבון בשתי פאותיו כי שנים[20]) לחשבון שלשה הפאה האחת אשר[21]) לפניו וארבעה[22]) הפאה[23]) האחרת שהיא אחריו[24]) ושתי הפאות המחוברות[25]) ששה שהוא כפל שלשה וככה כל מספר והנה האחד אין לפניו פאה ואחריו פאה אחת שהיא שנים[26]) והם כפל האחד. ועתה אדבר על כל חשבון שיש לו אחדים שלמים בלי[27]) שבר. ודע כי חכמי המזלות חלקו הגלגל לשנים[28]) עשר חלקים ועשו זה בעבור ששנת השמש י״ב חדשי

---

1) M 150: י׳. 2) R: f; in B steht noch etwas Unleserliches. 3) H, M 150, R: ותמצא שיעלה. 4) Soweit R S. 11; H u. M 150 noch: ולמאזנים עשה כמו שידעת, dann M 150 noch: נשלם השער הראשון. 5) H: המאזנים. 6) H: נותר. 7) B am Rande noch: ט׳ ט׳ את הוא יותר מט׳. 8) H: וכן. 9) H: מאזנים. 10) H: השני. 11) H: הוציאנו. 12) H: חשבונך שוה לשמור. 13) H: אז תדע כי חשבונך אמת. 14) H: הוא טעות. In B folgt hier ein Stück, welches eine Wiederholung enthält und sicher unecht ist. 15) H: האחדים. 16) H: רק האחד. 17) B: f. 18) In B steht noch gestrichen: וכל אחר מקבל רבוי ושנוי וחלוק. 19) In B übergeschrieben, aber gestrichen: אחר. 20) H: f. 21) H: שהיא. 22) H: ד׳. 23) H: והפאה. 24) H noch: שתים. 25) H: המתחברות. 26) H: שתים. 27) H: בלא. 28) H: על שנים.

לבנה[1]) ואין חשבון קטן מי״ב שיש לו חלקים רבים כמוהו כי יש לו[2]) אחדים שלמים[3]) °בחציו ושלישיתו[4]) ורביעיתו וששיתו °וחצי שתותו[5]) וחלקו המזל לשלשים מעלות כי זה המספר יש לו אחדים שלמים יותר מי״ב[6]) כי יש לו חצי ושלישית וחמישית וששית ועשירית והנה עלה מספר מעלות הגלגל ש״ס °וזה המספר קרוב לימות החמה[7]) וי״ש[8]) לו חצי ושלישית ורביעית וחמישית וששית ושמינית ותשיעית ועשירית והנה לא יחסר לו רק השביעית וכאשר תכפול זה המספר על ז׳ יהיה העולה אלפים ותק״כ וזה החשבון כולל כל החלקים עד עשרה. והנה חכמי המזלות כאשר יכפלו מעלות על מעלות יהיה המחובר מעלות שהם אחדים שלמים וככה כאשר יחלקו[9]) מעלות על מעלות יהיה °העולה בחלוק[10]) מעלות שהם אחדים שלמים.

ועתה אתן לך כלל איך תחלק כל חשבון בין שיהיה אחד או שנים או מספרים רבים כתוב אותם בטור אחד כל אחד כפי מעלתו ואח״כ כתוב החשבון שתחלק עליו בטור אחר בין שיהיה מספר אחד או רבים כל אחד לפי[11]) מעלתו כנגד[12]) כל חשבון[13]) כפי מעלתו[14]) בטור העליון וריוח תשים בין הטור העליון והטור[15]) השפל כדי שתוכל לכתוב טור אמצעי ביניהם בין שיהיה העולה מספר אחד או מספרים רבים כל אחד תשים לפי[11]) מעלתו. וראוי להיות המספר שתחלק עליו פחות מהמספר המהולק ממנו[16]) וזהו[17]) בחלוק השלמים ולא[18]) כן בשברים כאשר אפרש בע״ה[19]). ובתקנך הטורים כאשר אמרתי תחל לחלק מהמספר האחרון שבטור[20]) העליון[21]) ותחלק אותו על המספר[22]) האחרון שהוא בטור השפל וחשוב שנים המספרים אע״פ שהם כללים חשוב אותם כמו אחדים והעולה בחלוק[16]) ראה כמה מרחק המספר האחרון מהטור השפל מהמספר הראשון ממנו[16]) בין שיהיו בו אחדים או גלגל וכפי מספר המרחק תשוב אחורנית ושם תכתוב העולה בחלוק למעלה מהטור השפל שהוא למטה מהטור העליון. ואם ישאר במספר האחרון[23]) חשבון שלא נתחלק ולא הגיע למעלת האחדים[24]) תשיב[25]) אחורנית המספר הנשאר למעלה הראשונה שהיא פתוחה ממנו

1) H: הלבנה. 2) H noch: חלקים רבים. 3) H noch: בלי שבר. 4) H: כחציו וכשלישיתו. 5) H: f. 6) Randnote in B: מכי. 7) H u. M: f. 8) H: יש. 9) H: יתחלקו. 10) H: המחובר. 11) H: כפי. 12) H: ויהיה; in B stand erst ויהיה, dies ist gestrichen und כנגד übergeschrieben. 13) H: החשבון; in B steht noch, aber gestrichen: כפי מעלתו כנגד חשבון. 14) H noch: כנגדו כל חשבון כפי מעלתו (s. vor. Anm.). 15) H: וטור. 16) H: f. 17) H: וזה הדבר הוא. 18) H: לא. 19) M noch: ר״ל כדי לחלק; in B folgt noch ein Zusatz, welcher am Anfange mit ת׳ (= תּוֹסֶפֶת), am Ende mit ת׳ ע״כ. bezeichnet ist. 20) H: שהוא. 21) H: בעליון 22) B: מספר. 23) B: אחרון. 24) H: אחדים. 25) H: השב.

וחשוב כל אחד עשרה ואח״כ חלק על המספר שחלקת עליו והעולה בחלוק [0]תכתוב אותו[1]) אחורנית מהמעלה הראשונה שכתבת לפני[2]) מה שעלה בחלוק בראשונה ככה תעשה תמיד עד שתגיע[3]) אל המספר[4]) שהוא פחות מהמחולק עליו ואותו הנשאר תכתבנו[5]) למעלה מן הטור העליון כפי מעלתו ובשער החמישי אפרש לך מה שתעשה ממנו בע״ה[2]). דמיון בקשנו לחלק ט׳[6]) אלפים על ע׳ [0]בזאת הצורה[7]) הנה נשים ע׳[8]) בטור השפל[9]) כפי מעלתו[10]) ונחשוב כי הכל אחדים והנה נתן לו א׳ ונכתבנו[11]) במעלה השנית[12]) אחורנית מהמספר[13]) האחרון שהוא בטור הראשון[14]) כי ע׳[15]) הוא שני לטור השפל ונכתבנו[11]) באמצע נשארו[16]) לו שנים נשיבם אחורנית [0]מהמספר והם[17]) עשרים נחלקם[18]) על ז׳ והנה[17]) נתן[19]) לו ב׳ ונכתבנו[20]) אחורנית לפני הנכתב בראשונה ונשארו לנו[21]) ו׳ נשיבהו אחורנית יהיו ששים נחלקנו[22]) על ז׳ נתן לו ח׳ ונכתבנו[11]) אחורנית ונשארו לנו[21]) ד׳ והם במעלה השנית והם מ׳ והמספר המחולק עליו גדול ממנו. ואם היה המספר באחדים[23]) המחולק עליו גדול מהמספר האחרון בטור העליון תשיבהו אחורנית ותחשוב[24]) מאותו מקום וכפי מרחק המספר המחולק[25]) עליו תשיב אחורנית ועשה כמשפט. דמיון בקשנו לחלק כ׳ אלף על צ׳ [0]כזאת הצורה[26]) והנה בעבור כי מספר ט׳[27]) גדול מב׳[28]) נשיבהו אחורנית והם כ׳ נחלקם על ט׳ והנה[29]) ב׳ נכתבנו[30]) במעלה השלישית אחורנית שהיא שנית[31]) לחשבון שחלקנו ממנו ונשארו ב׳ נשיבם אחורנית [0]במעלה השלישית[32]) והם כ׳ נחלק[33]) על ט׳ והנה[29]) ב׳ ונשארו ב׳ נשיבם[34]) אחורנית במעלה השנית והם עשרים נחלקם על ט׳ ונתן לו ב׳ ונכתבם כדינו ונשארו ב׳ [0]שהם עשרים[35]) [0]כי הם[32]) [0]במעלה השנית[35]) בטור העליון וזה המספר פחות ממספר ט׳ על כן נכתוב גלגל אחורנית כי לא עלו אחדים שלא[36])

00
דוב
ט000
חבא
ז0

00
0בבב
ב0000ב
בבב
ט0

---

[1]) H: תכתבנו. [2]) H: f. [3]) H: שיגיע. [4]) H: מספר. [5]) H: תכתבהו. [6]) H: תשעת. [7]) H: f; in M f. die Figur; über die Divisionsfiguren in B vgl. Anm. 47 zur Übersetzung. [8]) H: ד׳. [9]) H: שפל. [10]) H noch: וט׳ בטור העליון כפי מעלתו. [11]) H: ונכתבהו. [12]) B: שנית. [13]) H: ממספר. [14]) H: העליון. [15]) H noch am Rande: ר״ל ד׳. [16]) H: ונשארו. [17]) H: f. [18]) B: נחלקנו. [19]) H: ונתן [20]) H: ונכתוב אותו. [21]) in B stand erst לט׳, das ist gestrichen und לו übergeschrieben. [22]) H: נחלקהו. [23]) H: מאחדים. [24]) in B übergeschrieben: ותחלק. [25]) H: המוחלק. [26]) H: f; in M f. die Figur. [27]) H: כ׳. [28]) H: ממספר ב׳. [29]) H: ונתן לו. [30]) H: ונכתבנו. [31]) H: שני. [32]) H: f. [33]) H: ונחלקם. [34]) in B f. von hier bis zum folgenden ונשארו ב׳. [35]) H: במעלה השנית שהם עשרים. [36]) H: כי לא.

יצאו[1]) לחוץ. ואם היה גלגל[2]) באחד המקומות ולא תוכל לחלק על המספר המחולק השב אחורנית מהגבוה ממנו. דמיון בקשנו להלק ד׳ אלפים ול״ב על שלשים חלקנו ד׳ על ג׳ ועלה בידינו א׳ וכתבנוהו[3]) אחורנית במעלת המאות כי הוא שני לו נשאר[4]) לנו עוד א׳ נשיבהו אחורנית[5]) במעלת המאות והיו[6]) י׳ נחלקנו[7]) על ג׳ ועלה בחלוק ג׳[8]) נשאר לנו א׳ השיבונו אותו אחורנית במעלת העשרות [0]ויהיו י״[9]) חברנו[10]) אותו[9]) עם [0]הכתוב במעלה השנית[11]) היו[12]) י״ג [0]חלקנו אותו[13]) על ג׳[14]) ונתננו[15]) לו ד׳ נשאר לנו א׳ השיבונו אותו אחורנית במעלה הראשונה היו י״ב שלא[16]) יתחלקו כי הנשאר פחות מאותו המחולק עליו וכבר יצא לחוץ כזה[17]).

ובאשר נרצה לחלק מספר אחד או שני מספרים או[18]) רבים על מספר אחד או על שני מספרים או על[19]) שלשה או רבים על מנת שיהיו פחותים ממספרי הטור העליון ככה תעשה תן לאחרון שבטור השפל מהטור העליון[20]) מה שתוכל לתת לו מהמספר האחרון שבטור העליון ותתן לראשון מן הטור השפל שהוא ראשון לאחרון ככפל מספר[21]) שנתת לאחרון על מספר הטור השפל[22]) שהוא[23]) לפני האחרון. ואם לא תוכל לעשות ככה שוב וגרע ממספרך שנתת לו בתחלה וכשאתה צריך לקחת מהטור שהוא לפני האחרון שום מספר השיבהו אחורנית לעשרות ככה תעשה לכל המעלות. ואם היה באחת[24]) ממעלות הטור העליון גלגל השב מן הגבוה ממנו אחורנית בעשרות וקח ממנו מה שצריך לו ואם היו שנים גלגלים במעלות הטור העליון ובמעלות הטור השפל מספרים תשיב אחורנית הגבוה שהוא כנגד החשבון שהוא אחר הגלגל האחרון ותקח מהם מה שתצטרך[25]) ומהנשאר[26]) תשיב אחורנית בעשרות ותקח ממנו מה שתצטרך בכפל המספר שהוא בטור השפל מן המעלה שהיא ראויה לקחת ממנה[27]). דמיון זה[28]) [0]ד׳ ט׳ שכתבנו הוא הנשאר מן החשבון שלא יתחלק[29]) והנה[30]) כאשר חלקנו[31]) ח׳ שהוא אחרון

00
אאא
בג0ד
אגד
0ג

0
טא0
0בא
דהאב
גאבח
ג
ב
גהג

---

1) H: יצא. 2) H: הגלגל. 3) H: נכתבהו. 4) H: ונשאר. 5) H noch: ונכתבהו. 6) H: יהיה. 7) H: אותם עשרה נחלק. 8) H noch: אותה ג׳ נכתבה כדינה. 9) H: f. 10) H: ונחברנו. 11) H: מה שכתוב שם. 12) H: ויעלה. 13) H: נחלקהו. 14) H noch: שבטור השפל. 15) H: ונתן. 16) H: ושלא. 17) H: f; M: והנה זה צורתו, Fig. fehlt aber. Sowohl in H wie in B fehlen die beiden Nullen in der obersten Reihe. 18) H noch: מספרים. 19) H: f. 20) B: f. 21) H: המספר. 22) M noch: מן השני העליון. 23) Randnote in B: ג׳ שיש שבוש. 24) H: באחד. 25) H: שצריך. 26) H: ומה שנשאר. 27) H: ממנו. 28) M: f; Fig. f. auch. 29) H u. M: f. 30) M: הנה. 31) M noch: שלשה עשר ומאתים וח׳ אלפים על שלשה וחמשים ושלש מאות ראשונה חלקנו.

בטור העליון על ג' שהוא אחרון בטור השפל והנה נתן[1]) לו שנים ובעבור כי[2]) היה[3]) הג' שבטור השפל שלישי[4]) החזרנו לשלישי ממנו אחורנית והגיע למעלת העשרות ונשאר לנו במספר הח' שנים והנה הנחנו שם אחד כי אחד יספוק לנו והחזרנו האחד[5]) אצל השנים והיו י"ב והסרנו[6]) ממנו י' [7]) שהוא כפל חמשה האמצעי שבטור השפל והנה נשארו ב' על הב' ונניח שם אחד ונחזיר אחד אחורנית על אחד שהוא שלישי ויהיו[8]) י"א נסיר[9]) [0]ממנו ו'[10]) לג'[11]) ראשון שבטור השפל[12]) נשארו ה' והנה[13]) לכל הג' שפלים מה שראוי להם נשוב לחלק כי נשאר לנו א' על ח' וא' על ב' וה' על א' נשיב הא' שהוא על הה'[14]) אחורנית על א' אשר על ב' יהיו י"א נחלק אותם על ג' שהוא בטור השפל יהיו ג' ונכתבנו[15]) כנגד הטור הראשון שהוא לפני השנים ונשארו[16]) לנו ב' נשיבם [0]על הה' אחורנית[17]) יהיו כ"ה נתן לחמשה האמצעיים שבטור השפל ט"ו נשארו עשרה נשיב אחד אחורנית על ג' וישארו ט' והא' עם הג'[18]) י"ג ונקח מהם[19]) ט' ישארו ד'[20]) וט' על הה' כי לא יכולנו לקחת בראשונה הג' מהי' אע"פ שיספיק לו כי איננו[21]) מעלתו עכשו אע"פ שלקח[22]) ממנו בראשונה כי בראשונה היה שלישי לו כי האחרון שבטור השפל לקח מן הח' אבל עתה לקח מן הב' ואחר שהוא שלישי צריך הוא[10]) שיקח[23]) ממעלתו[24]) השלישית[25])

ב
0ג
אה0
ה0וג
אחגט
אג
וטב

והנה הנשאר[26]) ד' ט'[27]). דמיון[28]) אחר באנו לחלק[29]) ט'[30]) על שנים[31]) והנה לא יכולנו לתת לו ד' כי לא ישאר[32]) אלא א' וכאשר תשיבהו אחורנית הנה [0]עם הג'[33]) י"ג וט' ד' פעמים ל"ו על כן נתן לו ג' נשארו[34]) ג' [0]נשיבם כלם[35]) אחורנית לשני לו שהוא ג' ויהיו שם ל"ג נתן לט' ג' יהיה כ"ז נשארו ממנו[36]) ו' על הג' נקח מהם א' ונניח ה' נשיבהו על הח' שהוא שלישי לאחרון[37]) שבטור העליון [0]ועם הח' שבטור השני[36]) יהיו[38]) י"ח נתן אותם כלם לו' שהוא שלישי שבטור השפל נכתוב[39]) על הח' גלגל לפי שלא נשאר [0]על הח'[40]) מאומה נשוב

---

1) B: נתננו. 2) H: f. 3) H: שהיה. 4) H: במעלה שלישית. 5) H noch: לאחור. 6) B: חסנו. 7) B: f. 8) H: יהיו. 9) H: נסור. 10) H: f. 11) H noch: שהוא. 12) H noch: כפול ב' פעמים ג' והם ו' והסירם. 13) H: הנה u. noch: נתת. 14) H: ח'. 15) H: וכתבנו. 16) H: נשארו. 17) H: אחורנית על הה'. 18) H noch: יהיו. 19) H: ממנו. 20) H noch: על הג'. 21) H: אינו. 22) B: שילקח. 23) H: שנקח. 24) H: מן מעלתו. 25) H: השלישי. 26) H noch: בלתי מחולק. 27) M: ט' ד'. 28) in M f. die Figur. 29) H noch: מספר כמו שהוא לפניך בזו הצורה והנה אנו צריכים לחלק, 30) H noch: אחרונה שבטור העליון. 31) H noch: אחרונה שבטור השפל. 32) H: ישארו. 33) H: עלו. 34) H: ונשאר. 35) H: כלם נשיבם. 36) H: f. 37) H: לאחריו. 38) H: הוא. 39) H: ונכתוב. 40) H: עליה.

לחלק שעדין לא יצא לחוץ[1]) נקח מן הה׳ שהנחנו על הג׳ שהוא שני בטור העליון שנים שהוא[2]) אחד נכתוב [0]זה האחד[3]) על הו׳ אחר הג׳ ששמנו על הט׳ בחלוק הראשון והוא שלישי בטור השפל וכבר יצא לחוץ נקח מן הג׳ שעל הג׳ אחד וישארו שנים נתן האחד על הגלגל והם י׳ נתן לט׳ שבטור השפל ט׳ נשאר על הגלגל א׳ נשיבהו אחורנית על הא׳ שהוא רביעי וראשון בטור העליון והם י״א נתן לו ו׳ נשארו[4]) ה׳ על הא׳ הנה הנשארים[5]) על הטור העליון ה׳ וגלגל וב׳ שהם ר״ה [0]ולא יתחלקו יותר שהג׳ שבטור השפל הם רצ״ו[6]) והנלקח לכל אחד ל״א. דמיון[7]) אחר[8]) בקשנו לחלק הטור העליון על הטור השפל[9]) לתת לו ב׳ [0]לא נוכל[10]) שלא[11]) ישאר כי אם א׳ וד׳ והם י״ד ויש לנו לחלק על ט׳ [0]ב׳ פעמים[6]) אך[12]) נתן לו[13]) א׳ ונשים אותו כנגד ט׳[14]) [0]שהם בטור[15]) העליון שהוא רביעי לה׳ אחורנית כשנים[16]) בטור השפל שהוא רביעי לה׳ ראשון[17]) שבטור השפל נשארו נ׳ על הה׳[18]) נקח מהם אחד ישארו ב׳ על הה׳ נשיבהו[19]) אחורנית על הד׳ [0]יהיו י״ד[20]) יקח[21]) ט׳ ישארו ה׳ יש לד׳ [0]שהוא בטור[22]) השפל לקחת מן השלישי שבטור העליון [0]למען כי שלישי הוא[20]) ולא יוכל[23]) כי השלישי שבטור העליון גלגל הוא נשיב מן הה׳ שהנחנו על הד׳ אחד יהיו י׳ יקח[21]) ד׳ ישארו ו׳ על הגלגל יקח הה׳ שהוא ראש בטור השפל והוא רביעי[24]) מהרביעי שבטור העליון שהוא ט׳ ישארו על הט׳[25]) ד׳ נשוב לחלק כי עדין לא יצא לחוץ והנשארים נ׳[26]) מן הטור העליון שהוא ראשון והמישי[20]) [0]ועל הט׳ ד׳[27]) ועל הגלגל ו׳ ועל הד׳ ד׳ ועל הה׳ ב׳[28]) נשיב[29]) הב׳[30]) על הד׳[31]) והם[32]) כ״ד[33]) [0]נתן לב׳ שהוא רביעי שבטור השפל ח׳[20]) נשארו[34]) ח׳ על הד׳ נשיב מהם[20]) ו׳ על הו׳[35]) אחורנית וא׳ נשאר על

אO
חאתO
בדדב
דוהג
גמOדה
חא
הדמב

---

[1]) M: לדמיון. [2]) H: שהם. [3]) H: האחד הזה. [4]) H: ונשארו. [5]) H: נשארו. [6]) H: f. [7]) in M f. die Figur. [8]) M noch: שלשה ותשעים וארבעה אלפים וחמשים על חמשה ומ׳ (.f ומ׳) מאות ואלפים. [9]) H noch: כמ׳ שכת׳ מצוייר לפניך. [10]) H: אי אפשר. [11]) H: כי לא. [12]) H: לכן לא. [13]) H noch: רק. [14]) H: הט׳. [15]) H: שבטור. [16]) H noch am Rande: ר״ל בשני בטור השפל מההתחלה שהוא רביעי לה׳ שבטור העליון אחורנית. [17]) H: ראש. [18]) H: הי׳. [19]) H: ונשיבהו. [20]) H: f. [21]) H: נקח. [22]) H: שבטור. [23]) H: נוכל [24]) H noch: ונקח. [25]) H: ט׳. [26]) H: כ׳. [27]) H: וד׳ על הט׳. [28]) H noch: וזו הב׳ הנשארת על הה׳ בטור העליון לחלקנה על הב׳ בטור השפל אי אפשר אלא. [29]) H noch: אותה. [30]) H noch: כולה אחורנית. [31]) H noch: אצלה. [32]) H: ויהיה. [33]) H noch: ולא נוכל ליתן לו יותר מח׳ בשביל הבאים אחריו ואותה הח׳ תכתבנה במקומה ממעל לה׳ הראשונה. [34]) H: וישאר. [35]) H: ד.

הד׳ ויהיו ע״ז נקח לט׳ ע״ב נשארו ד׳ במקום הו׳ אם נשיב מהם ג׳ נכון[1]) הוא[2]) כי הד׳ שבטור[3]) השפל יוכלו לקחת מהג׳ עם הד׳ שאחריהם שהם ל״ד אך לא ישאר כי אם שנים וכשנשיב[4]) אותו על הג׳ [0]לא יהיו כי אם[2]) כ״נ[5]) ויש לה׳[6]) שיקחו[7]) ס׳ לפיכך נשיב כל הד׳ אחורנית על הד׳ ונכתוב גלגל במקום הד׳[8]) כנגד הגלגל[9]) שבטור העליון והם מ״ד [0]יקחו הד׳[10]) ל״ב נשארו[11]) י״ב נקח מהם ד׳ כי[12]) לא יהיה די לנו בפחות וישארו ח׳ על הד׳ שהם על ט׳ ועם הג׳ הם מ״ג יקחו הה׳ ממ׳ ישארו ג׳ על ג׳ וח׳ על הט׳ שהם פ׳ ונלגל להוציאו ממאות ולהכניסו לאלפים וא׳ על הרביעי שהוא על הד׳ שהוא אלף ואלה לא יתחלקו כי המחולק גדול מזה שהוא אלפים וט׳ מאות ומ״ה. דמיון אחר בקשנו לחלק ס״ח אלפים וט׳ מאות וכ״א על ז׳ אלפים ונ״ג[13]) וזהו[14]) הדמיון[14]) ז׳[15])

ד
דזדדה0
אבטחו
ט
גה0ז

שהוא רביעי בטור השפל לא יוכל[16]) לקחת מו׳[17]) שהוא חמישי בטור העליון ומאחר[18]) שלא נוכל[19]) לתת לז׳ כל הצורך[20]) נשיב הו׳[21]) כלו[22]) אחורנית על הח׳ ויהיו ס״ח הנה[23]) חלקנו מן הח׳ שהוא רביעי לטור העליון נתן לו ט׳[24]) נוציאנו לחוץ על הג׳ שהוא רביעי בטור השפל נשארו ה׳ על הח׳ הנה[25]) השני לז׳ לא יקח מאומה כי הוא גלגל[26]) יש לה׳[27]) שיקח[28]) מן ב׳[29]) הרביעי בטור העליון שהוא שלישי לחלוק[30]) לא[31]) יוכל[32]) [0]לקחת מפני שהוא פחות ממנו[33]) נקח[34]) מן הט׳ שאחריו ה׳ נשיבם[35]) על הב׳ יהיו נ״ב וד׳ נשאר על הט׳ [0]והה׳ מנ״ב יקחו מ״ה[36]) ישארו[37]) ז׳ על הב׳ מן[38]) הז׳ נקח ג׳ ונשיבם אחורנית על א׳[39]) ויהיו ל״א

---

1) H: באמת. 2) H: f. 3) H: בטור. 4) H: ואם נשיב. 5) H noch: לבד. 6) H noch: שבטור השפל. 7) H: ליקח. 8) H: הו׳. 9) H: הג׳. 10) H: ונקח לד׳ u. noch: שבטור השפל. 11) H: ונשארו. 12) Das Stück von כי bis אלף lautet in H so: ונשיבם אחורנית אל הג׳ הראשונה שבטור העליון כדי לחלקו על ה׳ ראשונה שבטור השפל וישאר ח׳ במעלה שנייה ויהיה מ״ג בראשונה שבטור העליון תן המ׳ על הה׳ שבטור השפל ישאר ג׳ במעלה ראשונה בטור העליון וח׳ במעלה שנייה וא׳ במעלה רביעית. 13) M noch: כזאת הצורה, aber die Figur fehlt. 14) H: וזו היא צורתו. 15) H: והנה ד. 16) H: נוכל. 17) H: מן הו׳. 18) H: ואם כן אחר. 19) H: תוכל. 20) H: צרכה. 21) B: אותו. 22) H: כולה. 23) Das Stück von הנה bis הנה lautet in H so: הנה נתן לה ט׳ והנה ז׳ פעמים ט׳ הם ס״ג וזו הט׳ נכתוב אותה בחוץ על הג׳ שבטו׳ השפל נמצא שהיא עומדת במעלה ראשונה ונשאר על הח׳ ה׳. 24) B: f. 25) H: והנה. 26) H noch: והנה הה׳ בטור השפל. 27) H: לה. 28) H: ליקח. 29) H: הב׳. 30) H: בחלוק. 31) H: ולא. 32) H: נוכל. 33) H: f. 34) H: אלא נקח. 35) H: ונשיבם u. noch: אחור. 36) H: ומאלה נ״ב תתן מ״ח לה׳ שבטור השפל. 37) H: וישארו. 38) H: ומזו. 39) H: הא׳ und noch: הראשונה שבטור העליון.

יקחו[1]) ג׳ כ״ז ישארו ד׳ על א׳. דמיון אחר נרצה לחלק °תר״פ אלפים ות״ב
על אלפים וט׳[2]) °מספרים על[3]) מספרים שיהיו[4]) בטור העליון
ב׳ גלגלים וכן בטור השפל[5]) נתן לב׳ הרביעי בטור[6]) השפל
ג׳ מהו׳ הששי בטור[6]) העליון הנה[7]) הגלגל השני[8]) בטור[9])
השפל יש לו שיקח[10]) מן הח׳ °שבטור העליון[3]) ולא יקח
כלום והגלגל השלישי שבטור השפל יש לו שיקח[10]) מן
הגלגל[11]) השלישי שבטור העליון ולא °יוכל לקחת[12]) יש[13])
לט׳ הראשון[14]) בטור[15]) השפל לקחת מד׳[16]) שבטור העליון
לא[17]) יוכל צריכין[18]) אנו שנשיב מן הח׳ השני בטור העליון מה שיספיק
לט׳[19]) נשיב א׳ אחורנית כי די[20]) לנו בא׳ ונכתוב על הח׳ ז׳ והא׳[21])
שהשיבונו אחורנית על הגלגל יצא לנו בעשרות[22]) ועוד °לא יספיק[23]) נקח
ג׳[24]) מהם ונשיבם אחורנית ונשארו ז׳ על הגלגל והג׳ הם ל׳ על הד׳[25])
נשארו ז׳ במקום הד׳[26]) וגלגל ושנים[27]) הראשונים[28]) שבטור העליון וז׳
שעל[29]) הגלגל וז׳ שעל[29]) הח׳ עוד נשוב לחלק שהרי[30]) לא[23]) יצא[31])
נקח[32]) לו[23]) ג׳[33]) מן הה׳ שעל הח׳ ונשימהו תחת הגלגל הראשון שהוא
רביעי לח׳[34]) ונשאר א׳ על הח׳[35]) יש לגלגל שיקח[36]) °מן הגלגל[37])
לא[38]) יוכל ויש[39]) לגלגל שאחריו שיקח ממעלתו[23]) שהיא[40]) הז׳ שעל[41])

ג 0
ודאא
0גזזו0
בו0ד0חו
חגג
ט00ב

---

1) Statt der Worte יקחו bis א׳ steht in H folgendes: מהם תתן כ״ז לג׳ שבטור השפל וישאר ד׳ על הא׳ הראשונה שבטור העליון וד׳ במעלה שנייה והז׳ במעלה השלישית וה׳ במעלה רביעית בלי חלוק כי טור השפל יותר מטנו. 2) H, M u. Rodet S. 16: f. 3) H, R: f. 4) B: שיהיה. 5) H u. R noch: כזו הצורה; in M f. die Figur; in R ist die Fig. so:

0ונא	חלוק השלישי
בגדזא	חלוק השני
ב0זזז	חלוק הראשון
ב0ד0חו	הנחלק
חנג	יוצא מן הנחלק
ט00ב	על זה נחלק

6) H, R: שבטור. 7) H, R: והנה. 8) B: שני. 9) R: שבטור. 10) R: ליקח. 11) H: f. 12) R: יקח. 13) H: ויש. 14) H: הראשונה. 15) R: שבטור. 16) R: מן ד׳. 17) H, R: ולא. 18) R: צריכים. 19) M, R: לו. 20) R: דיי. 21) R: ואחר. 22) R: בעשרה. 23) R: f. 24) H, R: מהם ג׳. 25) H, R noch: ל״ד נקח כ״ז (R: הם) והם. 26) R: ד׳. 27) R: וב׳. 28) H, R: ראשונים. 29) R: על. 30) R: f; H noch: עדיין. 31) R: f; H noch: לחוץ. 32) H, R: נתן. 33) R noch: פעמים כ׳. 34) R: לא׳. (in R.'s Übersetzung aber: „du 8“). 35) R: הד׳. 36) H: ליקח; R noch: ממעלתו. 37) H: ממעלתו; R noch: שעליו ד׳. 38) Von לא bis ממעלתו f. in H. 39) R: ועוד יש. 40) Statt שהיא הד׳ שעל הד׳ steht in R: מן הד׳ שעליו ד׳. 41) H: על.

הד׳ לא[1]) יוכל[2]) יש[3]) לט׳[4]) שיקח מן הגלגל שהוא מעלתו לפי שהוא רביעי לחלוק ולא יוכל לפי שאין על הגלגל כלום וגם[5]) שלא[6]) יוכל להשיב אותו אחורנית על השנים[7]) כי השנים[7]) אינם[8]) מעלתו[9]) נשיב מן הז׳ שעל[10]) הד׳ שלפניו[11]) ג׳[12]) נשימם[13]) על הגלגל[14]) והם[15]) ל׳[16]) נשארו[17]) [0]על הגלגל ג׳[18]) וד׳ על הד׳ שלפניו[19]) וז׳ על הגלגל [0]שהוא לפני[20]) הח׳[21]) וא׳ על הח׳ נשוב לחלק שעדין[22]) לא יצא לחוץ הנה[23]) מן הא׳ לא נוכל[24]) לקחת האחרון[25]) שבטור השפל נשיב אותו אחורנית על הז׳ שהוא על הגלגל והם י״ז נתן[26]) לו ח׳[27]) [0]נוציאם לחוץ[28]) אחרי[29]) הג׳[30]) כי הוא רביעי לחלוק כי מן הז׳ שעל הגלגל חלקנו[31]) ושם נשאר א׳ הנה יש לגלגל שיקח מן הד׳ ולא יקח גם יש לגלגל האחר[32]) שיקח מן הג׳ שעל הגלגל שבטור[33]) העליון ולא יקח ויש לט׳ שיקח מן הב׳ ולא יוכל[34]) נשיב אחורנית אם[35]) נאמר לג׳ שעל הגלגל[36]) שיתן[37]) לב׳ הראשון[38]) לגלגל[39]) אין לו מה שיספיק[40]) לו[41]) כי אין לו אלא ג׳ נקח[42]) מן הד׳ שבמקום[43]) הד׳ אחד[44]) ויהיה[45]) על [0]הגלגל עם[46]) הג׳[47]) י״ג נקח מהם ז׳ ונשיבם אחורנית[48]) על הב׳ והם[49]) ע״ב יצאו הכל בט׳ ונכתוב גלגל על הב׳ שלא נשאר[50]) עליו כלום ועל הגלגל שהוא שני לב׳[51]) נשארו ו׳ וג׳ על[46]) ד׳[52]) וא׳[46]) על הגלגל שהוא[53]) שני לח׳ ואלה נשארו[54]) שלא יתחלקו כי המחולק[55]) גדול מזה כי המספר הנשאר[56]) אלף וג׳ מאות וס׳ והמחולק[57]) עליו הוא[46]) אלפים וט׳[58]). דמיון אחר

---

1) H, R: ולא. 2) R: יקח. 3) R: ויש. 4) R: לח׳. 5) H: f. 6) H: ולא; R: לא. 7) R: הב׳. 8) R: אינה. 9) R: ממעלתו. 10) H: על. 11) R noch: וז׳ על הגלגל שהוא לפני הח׳. 12) In R steht ג׳ schon vor מן הז׳; in H fehlen die Worte nach שלפניו bis zum zweiten שלפניו einschliesslich. 13) R: ונניח. 14) R noch: ג׳ 15) R: יהיו. 16) R noch: נתן מהם כ״ז. 17) R: ישארו. 18) R: ג׳ על הגלגל. 19) R: שאחריו. 20) R: שלפני. 21) H: הא׳. 22) R: שעדיין. 23) R: והנה. 24) H, R: יוכל. 25) R: ב׳ אחרון. 26) R: נתנו. 27) H, R noch: ב׳ פעמים. 28) R: ונשים ח׳. 29) R: אחר. 30) R noch: תחת הב׳. 31) R noch: ונוציאם לחוץ. 32) R: האחד (übersetzt: „numéro un"). 33) H: בטור 34) R: יספיק לו. 35) R: ואם. 36) R noch: הראשון; die folg. Worte שיתן bis לגלגל einschl. f. in R. 37) H: f. 38) H: ראשון. 39) H: f. 40) R noch: עם הב׳. 41) In H f. von לו bis הגלגל einschl.; in R: f. לו bis ג׳. 42) R noch: א׳. 43) R: שעל. 44) R: f; aber noch ישארו ג׳. 45) R: והא׳. 46) R: f. 47) R noch: הם. 48) H: f. 49) R: ויהיו. 50) R: נשארו. 51) H, R: לו. 52) H: הז׳; R: f. (aber übersetzt: „et 3 sur le 4 qui est à deux rangs du 8"). 53) R: f. 54) H: ישארו. 55) R noch: עליו. 56) H, R noch: הוא. 57) R: והמחלק. 58) R noch: וחלוק היוצא מן החלק הם של״ח (soweit R S. 17).

נכבד וקשה מכל החשבונים שתחתיו מאין נלגל ובראשונה אפרש כי לעולם

1)

0
בזא
גאה0
חגבא
בגדהוז
הח
0בטח

2)

0
0א
ההא
וו ח0
0גטא
ההההז
וווחח0
0גבטדא
וההההזז
0באאחחח0
בהדדדדדא
זזזזזזזזז
החזזז
טטטט

כשיתרחק חשבון מחשבון והטעם שיכתב[1]) גלגל באמצע [0] כדמיון זה[2]) ג0ב[3]) לא[4]) נשיב הב׳[5]) אל הג׳ או כמה שיצטרך[6]) לפי החשבון שבטור השפל לפי שהגלגל[7]) באמצע אך נשיב הב׳ או האחד מהם[8]) אל הגלגל ואז[9]) נחלק כמשפט ואומר לך כלל אחר מכל החשבונות שתחלק בין רבים בין מעטים לעולם[0] [10]) יש לך לחלק חשבון העליון על התחתון עד שיצא לסוף החשבונות בא על סופו אם יש גלגל עליו לא יתחלק עוד כמו זה 1) וזה צורת הנכבד והקשה[11]) 2) בקשנו לחלק חשבון[12]) ט׳ שביעיות על ד׳ תשיעיות[13]) הנה ראש כל דבר אוֹרְךָ[14]) איך תחלק אחר שתראה

---

1) H: שיכתוב. 2) H: כזה הדמיון, 3) M: f. 4) H noch: גאמר. 5) H: בי׳. 6) H: שנצטרך. 7) H: שגלגל. 8) H: f. 9) Von ואז bis והקשה (Z. 13) fehlt in H und M. 10) In H steht auf der Seite, auf welcher השער החמישי beginnt, oben am Rande folgende auf unsere Stelle hier sich beziehende Bemerkung: זה מן החלוק והצורך בּו ונשכח ולא נכתב במקומו לעולם יש לט לחלק חשבון העליון על התתתון עד שיצא לסוף החשבון אם גלגל עליו עוד לא יתחלק נ״א (?ס״א oder) אם גלגל על גלגל עוד לא יתחלק דמיון. 11) H noch: דמיון. 12) H: f. 13) H noch: כזו הצורה. In H finden sich folgende zwei Figuren hierzu. 14) H: אלמדך.

הה
ההה ח
וההה ח ז
בהדדחזז
זזזזזזזזז
החזזז
טטטט
הנשאר בלתי מוחלק בוהה

אלו נשארים בלתי מחולקים					5	5	6	2
	.			5	5	5	5	7
			8	5	5	4	7	7
		7	8	5	4	7	7	7
	7	7	8	4	7	7	7	7
7	7	7	7	7	7	7	7	7
	יוצא בחלוק			7	7	7	8	5
					9	9	9	9

שהז׳ פחות מהט׳ תצטרך[1]) להשיבו אחורנית ותחלה כשתחל לחלק תתן לט׳ ז׳ ותכתבנה אחורנית במעלת הד׳ שתחלק ממנו שהוא שני לטור והנשאר י״ד וכן תעשה עד שישאר במעלת א׳ לחלוק ז׳ וכן בשני לחלוק ז׳ ובשלישי לחלוק ח׳ וברביעי לחלוק ד׳ נשוב לחלק נשיב הז׳ שהוא בשני אל השלישי אחורנית ונחלק ממנו ונכתוב ז׳ תחת ז׳ ששי שהוא ד׳ לחלוק והנשאר י״ד וכן תעשה עד שישאר ז׳ ואחריו ח׳ ואחריו ה׳ ואחריו ד׳ נשוב לחלק נשיב ז׳ על הח׳ ונשים אותה במערכת ד׳ והנותר ט״ו ומה שתשאיר ח׳ ואחריו ה׳ ואחריו ה׳ ואחריו ד׳ ותכתוב ז׳ תחת השלישי שהוא הרביעי לחלוק נשוב לחלק נשיב ח׳ על ה׳ ונתן לו ח׳ תחת השמיני שהוא ז׳ רביעי לחלוק ישאר ה׳ על ה׳ ואחריו ה׳ ואחריו ה׳ נשוב לחלק

---

1) An Stelle dieses mit תצטרך beginnenden und mit ופ״ה (folg. S. Z. 4) schliessenden Stückes steht in H folgendes: לכן שימהו לאחור לז׳ ויהיו ע״ז וחלקם על ט׳ ולא תוכל ליתן לו יותר מז׳ לצורך שאר המספר וישארו י״ד תניח מהם ז׳ לחלוק השני וז׳ תשימהו לאחור על הז׳ השלישי ויהיו ע״ז וחלקם על ט׳ השני וישארו י״ד תניח מהם ז׳ לחלוק שני והז׳ תשימהו לאחור אל הרביעי יהיו ע״ז וחלקם על הט׳ השלישי וישארו י״ד תניח מהם ח׳ לחלוק שני והו׳ תשימהו לאחור אל הז׳ החמישי ויהיו ס״ז וחלקם על הט׳ הרביעי וישארו ד׳ נמצא שנשארו לחלוק השני ד׳ ז׳ ז׳ ד׳ ח׳ ד׳ ז׳ החלוק השני תשלח ז׳ לאחור ויהיו ע״ז וחלקם על הט׳ הראשון וישארו י״ד תניח מהם ז׳ לחלוק שלישי והז׳ שלחהו לח׳ שלפניו ויהיו ע״ח וחלקם על הט׳ השני ותן לו ז׳ כמ׳ כן וישארו ט״ו תניח מהם ח׳ לחלוק שלישי וז׳ תשלחהו לאחור אל הד׳ ויהיו ע״ד וחלקם על הט׳ השלישי וישארו י״א תניח מהם∵ [Rand: ∵ה] לחלוק שלישי והו׳ שלחהו אל הז׳ ויהיו ס״ז וחלקם על הט׳ הרביעי וישארו ד׳ נמצא שנשארו לחלוק שלישי ז׳ ז׳ ד׳ ד׳ ה׳ ח׳ ד׳ החלוק השלישי תשים ז׳ לאחור ויהיו ע״ח חלקם על ט׳ הראשון ותוכל לתת לו ז׳ ולא יותר וישארו ט״ו תניח מהם ח׳ לחלוק הרביעי והז׳ שימהו לאחור אל הה׳ ויהיו ע״ה וחלקם על ט׳ השני ותן לו ז׳ כמו כן וישארו י״ב תניח מהם ה׳ לחלוק רביעי והז׳ שימהו לאחור אל ד׳ ויהיו ע״ד וחלקם על ט׳ שלישי וישארו י״א תניח מהם ה׳ לחלוק הרביעי והו׳ שימהו אחורנית אל הז׳ ויהיו ס״ז וחלקם על הט׳ הרביעי וישארו ד׳ ונמצא שנשארו לחלוק רביעי ז׳ ד׳ ה׳ ה׳ ח׳ חלוק הרביעי שים ח׳ אחורנית על הה׳ ויהיו פ״ה תוכל לחלקם על הט׳ הראשון וליתן לו ח׳ וישארו י״ג תניח מהם ה׳ לחלוק חמישי והח׳ שלחהו אחורנית אל הה׳ ויהיו פ״ה וחלקם על הט׳ השני וישארו י״ג תניח מהם ה׳ לחלוק ∵ששי [Rand: ∵חמישי] והח׳ שלחהו אחורנית אל הד׳ ויהיו פ״ד וחלקם על הט׳ השלישי ח׳ כמו כן וישארו י״ב תניח מהם∵ [Rand: ∵ה׳] לחלוק חמישי והז׳ שלחהו לאחור אל הז׳ ויהיו ע״ז וחלקם על הט׳ הרביעי וישארו ה׳ ונמצא הנשאר לחלוק חמישי ז׳ ה׳ ה׳ ה׳ ה׳ חלוק חמישי שים ה׳ אחורנית ויהיו נ״ה תן מהם ה׳ על הט׳ הראשון וישארו י׳ תניח מהם ה׳ בלתי מחולקים וה׳ תשלח אחורנית אל הה׳ השלישי ויהיו נ״ח ותן על הט׳ השני ה׳ כמו כן וישארו י׳ תניח מהם ה׳ בלתי מחולקים והה׳ שלחהו אל ה׳ הרביעי ויהיו נ״ה ותן על הט׳ השלישי ה׳ כמו כן וישארו י׳ תניח מהם ו׳ בלתי מחולקים והד׳ שלחהו אל הז׳ ויהיו מ״ז וחלקם על הט׳ הרביעי ה׳ כמו כן וישארו בלתי מחולקים ב׳ ו׳ ה׳ ה׳.

נתן ה׳ על ה׳ אחורנית ונתן ה׳ תחת ז׳ התשיעי שהוא רביעי לחלוק והנשאר י׳ ומה שתשאיר ה׳ ואחריו ה׳ ואחריו ו׳ ואחריו ב׳ ועוד לא יתחלק כי כבר יצא לחוץ בה׳ וכי הנותר ה׳ אלפים וה׳ מאות וס״ב והמחולק עליו ט׳ אלפים וט׳ מאות וצ״ט והמקובל ע״ז אלף וז׳ מאות ופ״ה וכלל[1]) חלוק החשבון ג׳ זיינין וג׳ חיתין וג׳ דלתין וט׳ ההין וו׳ אחת וב׳ אחת והכלל כי עם כל החלוקים ד׳ חוץ מן האחרון שנתמעט עד ג׳. **כלל החלוק** אם המספר שתחלק עליו שני מספרים או יותר חלק הטור העליון על סוף הטור השפל אם מספר העליון גדול מהשפל ואם השפל גדול מהעליון השב סוף העליון לעשרות אחורנית על המעלה הקודמת לה ותצרפם עם הנכתב בה ואם במעלה הקודמת לה גלגל ספור העשרות וקח ממנו מה שתוכל לתת למספר השפל האחרון וכתוב מה שתוכל לתת לכל מספרי השפל האחרים מה שתתן לאחרון והיוצא כתבהו באמצע שני הטורים רחוק מן המעלה שחלקת ממנה כמרחק סוף השפל מראשו וכן תעשה לכל החלוקים שתשוב עליהם כזה החלוק שתמנה מן המעלה שחלקת ממנה כמספר סוף השפל מראשו ושם תכתוב היוצא בחלוק ומהמספר השני לסוף השפל תקחנו מן הסמוך למעלה שחלקת ממנו כמספר הכתוב באמצע הטורים ואם לא יספיק לך תשיב מה שנשאר מן המעלה שחלקת תחלה אחורנית אל המעלה הקודמת לה ותצרף עם שנכתב בה וקח ממנה מספרך וכן תעשה לכלם.

דמיון[2]) רצינו לחלק פ״ג אלפים ותקכ״א על תתק״נ הנה הט׳ שבטור השפל יותר מח׳ שהוא סוף העליון על כן תשיב הח׳ אחורנית על הג׳ יהיו פ״ג ונתן לט׳ מהפ״נ ט׳ יהיו פ״א ונשארו ב׳ על הג׳ והגלגל לא יוכל לקחת מן הה׳ העליון והג׳ התחתון לא יוכל לקחת מן הה׳ העליון כי אינו מעלתו לכן השיב מן הה׳ שלשה על הב׳ יהיו ל״ב נסיר

ד ד 0
ה ה ב ב 0
א ב ה ג ח
ב ט
ג 0 ט

מהם כ״ז שהם ט׳ פעמים ג׳ שהוא ראשון השפל ונשארו ה׳ על הב׳ וב׳ על הה׳ ובעבור שהט׳ התחתון הוא מעלה השלישית וכבר יצא בחלוק ט׳ נכתבנו במעלה השנית שהוא שלישי לג׳ העליון שחלקת ממנו נשוב לחלק ונשיב ב׳ אשר על נ׳ אל הב׳ אשר על הה׳ יהיו כ״ב נסיר מהם ב׳ פעמים ט׳ כי ט׳ הוא השפל ונשארו ד׳ על ה׳ ונכתוב מעלה הראשונה שהוא שלישית לה׳ העליון שחלקת ממנו בזה החלוק הנה הגלגל לא יוכל לקחת מאומה מן הה׳ אשר על הב׳ והג׳ השפל לא יוכל לקחת מן הא׳ העליון כי אין בו רק אחד על כן נשיב אחד מן הה׳ שעל הב׳ אל הא׳ יהיו י״א ונקח מהם לג׳ התחתון ו׳ שהם ב׳ פעמים ג׳ ונשארו ד׳ על הה׳ וד׳ על הב׳ וה׳ על

[1]) Von וכלל bis ק״נ (folg. S. Z. 13) fehlt in H, [2]) Von דמיון bis ק״נ (folg. S. Z. 13) fehlt in M.

א׳ שלא יתחלקו. דמיון אחר רצינו לחלק י״א אלף וש״נ על ק״י לקחנו א׳ מן הא׳ האחרון העליון וכתבנוהו במעלה השלישית תחת הג׳ העליון לפי שא׳ האחרון השפל הוא במעלה השלישית וככה נרחיק היוצא מסוף המספר שהחלות לחלק ממנו וכן קח מא׳ הרביעי העליון א׳ השני התחתון ובעבור שלא נשאר במעלה הרביעית מאומה ונצטרך לשוב לחלק מג׳ העליון נקח מהם ג׳ לא׳ האחרון מהשפל ונכתוב ג׳ במעלה הראשונה שהיא שלישית לג׳ שהחלנו עתה נשוב לחלק ממנו ולכן שמנו גלגל במעלה השנית וזה כי בחלוק הראשון החלנו מסוף העליון ולכן כתבנו היוצא בחלוק ברחוק ג׳ מעלות ממנו אחורנית כמספר מעלות סוף השפל אבל בחלוק השני הזה החלנו לחלק מהג׳ העליון ולכן נכתוב היוצא רחוק ג׳ מעלות אחורנית והגיע זה אל המעלה הראשונה וא׳ השני בטור השפל נקח מה׳ העליון ישארו ב׳ על הה׳ והם עשרים שלא יתחלקו והנה היוצא ק״נ.

	ב	0	0	0
0	ה	ג	א	א
		ג	0	א
		0	א	א

והנה נשלים לדעת המאזנים °אם חלקת נכונה[1]) דע מאזני המספר שחלקת עליו בין שיהיה אחד או רבים גם[2]) .דע מאזני המספר שעלה בחלוק שכתבת[3]) בין שני הטורים בין שיהיה אחד או רבים וכפול זה על זה ר״ל[1]) האמצעי[4]) על התחתון ודע[5]) הנשאר על ט׳ ט׳[6]) והוא השמור אם לא נשאר לך מספר שנשאר שהוא פחות מהמספר שחלקת עליו כי[7]) אם נשאר קח המאזנים שלו וחבר אותו עם השמור שהיה לך והמחובר הוא השמור באמת וראה מאזני המספר הגדול שחלקת אותו שהיה בטור העליון אם היה שוה למאזני[8]) השמור תדע שחשבונך[9]) אמת. ואם תכפול[10]) מה שיעלה[11]) בחלוק על[12]) המספר שחלקת עליו אחר שתחבר אליהם מה שנשאר לחלק אז יהיה המחובר שוה למספרי הטור העליון °וחלוק נכון[13]).

השער הג׳

°הוא שער החבור[13])

כתוב בספרי °חכמי החשבון[14]) כי הרוצה לדעת[15]) כמה המחובר מן המספרים שיעברו[16]) על הסדר עד סוף מספר ידוע יכפול אותו על חציו

---

1) H: f. 2) H noch: כן. 3) H: שהוא. 4) H: אמצעי. 5) H noch: כמה. 6) H: תשיעיות. 7) H: אבל. 8) H: במאזני. 9) H: כי חשבונך. 10) H noch: כל. 11) H: שעלה. 12) H noch: כל. 13) H: f. 14) H: ין. 15) H: לידע. 16) H: שעברו.

בתוספת חצי אחד והעולה הוא המחובר. דמיון רצינו לדעת כמה הם [0]המספרים המחוברים[1]) מא׳ עד סוף[2]) י״א הנה ידענו כי חצי י״א ה׳ וחצי נוסיף חצי אחד הנה[2]) יהיו[3]).ו׳ והנה נכפול [0]י״א על ו׳[4]) יעלו[5]) ס״ו והוא המחובר. דמיון אחר בזוגות[6]) כמה המחובר עד סוף י״ח והנה לקחנו חציו והוא ט׳ [0]כפלנו י״ח עליו ועלו[7]) קס״ב[8]) [0]ועוד יש לכפול[9]) חשבון[2]) י״ח על חצי אחד יעלו ט׳ [0]חבר אותו[10]) עם קס״ב יעלו קע״א והוא המחובר ועל אלו שני הדרכים הולך[11]) כל חשבון. דרך[12]) אחרת הוסף על סוף המספר אחד שלם וכפול על החצי מהמספר והעולה הוא המחובר. דמיון בנפרדים כמה המחובר עד סוף י״א הוספנו אחד והיו י״ב והנה חצי י״א ה׳ וחצי כפלנו י״ב על ה׳ וחצי עלו ס״ו וככה המחובר ובזוגות עד סוף י״ח הנה חציו הוא ט׳ הוספנו אחד על י״ח היו י״ט כפלנו י״ט על ט׳ עלו קע״א[13]).

אמר אברהם המחבר מצאתי דרך אחרת תוסיף[14]) על מרובע סוף החשבון השרש[15]) שהוא בעצמו[16]) וראה כמה המחובר וחצי המחובר הוא המבוקש. דמיון ידענו כי מרובע י״א קכ״א ואחר[17]) נוסיף[18]) על[19]) י״א שהוא השרש והוא סוף[17]) החשבון יעלו[20]) קל״ב וחציו ס״ו ומזה הדרך תוכל להוציא כל השאלות שהם בענין הזה[21]) שאל שואל חברתי מספרים[22]) עד שהגיעו למספר[23]) ידוע ועלה המחובר[17]) תס״ה כמה הוא סוף החשבון כפול לעולם החשבון[17]) המחובר וקח שרש הנכפל[24]) שעבר ובחון אותו כי אם נשאר[25]) בין המחובר ובין[17]) הנכפל[26]) כמו השרש בלי תוספת ומגרעת תדע כי החשבון נכון והחשבון[27]) בעצמו[28]) השרש והנה כפלנו תס״ה ועלה[29]) תתק״ל וידוע כי המרובע שעבר היה תת״ק ושרשו ל׳ והוא סוף המספרים המחוברים והנה אין בין המרובע והנכפל כי אם ל׳ והוא סוף החשבון. שאלה אחרת חברנו כל המרובעים שהם

---

1) H: מספרים מחוברים. 2) H: f. 3) H: ויהיו. 4) H: ו׳ על י״א. 5) H: יהיו. 6) H noch: כי מה שאמרנו עתה הוא נפרד. 7) H: והנה ט׳ פעמים י״ח הוא. 8) H noch: ועתה יש לנו להוסיף חצי אחד. 9) H: והנה נכפול. 10) H: תתחברנה. 11) H: תוכל להוציא. 12) Von דרך bis קע״א (Z. 11) fehlt in H. 13) M noch: דרך אחרת כוללת לזוגות ולנפרדים תכפול מרובע חצי המספר ותוסיף עליו שרש׳ זה המרובע שהוא חצי החשבון והעולה הוא המבוקש . . דמיון רצינו לדעת ככה המחברים עד י״ב והנה חצי המספר ו׳ והמרובע ל״ו כפלהו יהיו ע״ב הוסיף על זה ו׳ שהוא השורש עלו ע״ח והוא המבוקש. 14) H: שתוסיף. 15) Statt der Worte השרש bis כמה steht in B: שרשו וכמה שיגיע, am Rande jedoch wie oben, und zwar mit der Bemerkung ס״א. 16) H noch: סוף החשבון. 17) H: f. 18) H: ונוסיף. 19) H: עליו. 20) H: ויעלו 21) H: זה und noch: דמיון. 22) In B am Rande. 23) H: לסוף מספר. 24) M: המרובע. 25) H: הנשאר. 26) H: והנכפל; M noch: ר״ל מרובע השורש. 27) H: וחשבון. 28) H noch: הוא. 29) H: יעלו.

עד סוף החשבון שהוא ידוע כמה המחובר יש [0] לך לדעת[1]) אותו החשבון
שהזכיר כמה יעלה המחובר מהמספרים שלפניו ועמו נשים שם לאותו מספר
הידוע ונקראנו סכום והנה נקח שתי שלישיות[2]) המספר שהזכיר עם תוספת
שלישית אחד ונכפול זה המחובר על סכום המספר והעולה הוא המבוקש
והוא המחובר מהמרובעים עד סוף המספר הנזכר. **דמיון** רצינו לדעת כמה
המרובעים[3]) שהם[4]) עד סוף שבעה וכבר[5]) ידענו שהמחובר כ״ח ונשוב
לדעת כמה שתי שלישיות שבע עם תוספת שלישית אחד והם חמשה כי
שתי שלישיות ועם תוספת שלישית אחד נכפול על הסכום והנה נכפול על
הסכום ה׳ ועלו ק״מ והוא המבוקש. **דמיון** אחר[6]) כמה[7]) המחובר
מהמרובעים[8]) שהם[9]) עד סוף[9]) י״ב וידוע[10]) כי הסכום שלו ע״ח ושתי
שלישיות ח׳ נכפלנו על ע״ח יעלו תרכ״ד נחבר אליו שלישית הסכום שהוא
כ״ו יעלה[11]) תר״נ והוא המבוקש.[12]) ענין[13]) **אחר** לדעת כמה המחובר מכל
הנכפל והוא כפל האחרון במגרעת הראשון. **דמיון** כי המחובר מן ג׳ ו׳ י״ב
הם כ״ד בחסרון ג׳ הרי כ״א והוא המחובר. **דמיון** אחר א׳ ב׳ ד׳ הם ח׳
במגרע א׳ הרי ז׳ והוא המחובר. וכן אם לא יניד כי אם סכום אחרון כמו אם
ישאל כמה הם הכפולים זה על זה עד ל״ב כפול ל״ב יהיה ס״ד תחסר אחד
שהוא ראשון ישאר ס״ג והוא המבוקש. ואין צורך להזכיר כל[9]) זה רק אזכיר

---

1) B: לדעת לך. 2) H: שלישית. 3) H noch: על הסדר מא׳. 4) H: f.
5) Statt der Worte וכבר bis ועלו (Z. 9) steht in H so: תמצא חבורו
מראשו כמ׳ שהראיתיך עתה ויהיו כ״ח ושמרהו ועוד תקח מן הז׳ שני שלישיתיו
ושליש והם ה׳ וכפול ה׳ בכ״ח ששמרת ויעלו. 6) H noch: לזוגות. 7) H: אם
יאמר כמה הוא. 8) H noch: כסדר. 9) H: f. 10) Statt der Worte וידוע
bis שהוא steht in H so: אז תדע חבורו מראשו ועד י״ב והם כמ׳ שידעת
ע״ח ושמרהו וחזור ותקח שני שלישי י״ב והם ח׳ ותכפלם על ע״ח ויהיו תרכ״ד ועוד
חבר לאלו שליש ע״ח והם. 11) H: ויעלה. 12) M noch: ועל זה הדרך תוכל
להוציא כל השאלות על זה הענין ודע כי החבור הוא שתחל לחבר האחדים תחלה
ואחר כן העשרות וכן בסדר וזה הפך החלוק שהוא יעשה אחורנית; H noch: דרך
אחרת קח המחובר מן י״ב והם ע״ח ותקח שני שלישי י״ג והם ח׳ וב׳ שלישים והסר
מהם שליש אחד וישארו ח׳ ושליש ותכפלם על ע״ח תדע כי הם יעלו כמו כן תר״נ
ואם יאמר כמה המחובר מהמרובעים עד ח׳ קח חבורו של ח׳ והם ל״ו ובקש שני
שלישי ט׳ והם ו׳ ותכפלם בל״ו ויעלו רי״ו הסר מהם שליש ל״ו והם י״ב וישאר ר״ד
והוא המבוקש. שאלה כמה הוא המחובר מד׳ עד ט׳ אז תעשה כמ׳ שלמדתיך למעלה
לכפול ה׳ בט׳ ויעלו מ״ה והסר מהם ב׳ פעמים ג׳ והם ו׳ וישארו ל״ט והוא המבוקש
ואם עוד ישאל כמה היא המחובר מהמרובעים כסדר מד׳ ועד ט׳ אז תעשה כמ׳
שצויתיך למעלה למצוא מחוברם מראשם והם מ״ה ושמרם וקח שני שלישי ט׳ והם ו׳
וכפלם במ״ה ויעלו ר״ע ועוד שליש מ״ה והם ט״ו ויעלו רפ״ה ותסיר מזה מרובע
א׳ ב׳ ג׳ והם י״ד וישארו רע״א והוא המבוקש ועל הדרך הזה תוכל להוציא כל השאלות
מזה הענין. 13) Von ענין bis המבוקש (letzte Zeile) fehlt in H u. M.

זה[1]) דרך מאזנים[2]) כשתחבר מספר אל מספר בין שיהיו רבים אלו ואלו שים המספר[3]) האחד[4]) בטור העליון כפי מעלותיו[5]) גם שים המספר השני כפי מעלותיו[5]) בטור השפל ואח״כ חבר כל אחד אל[6]) מעלתו והמחובר כתוב אותו בטור שלישי[7]) ואח״כ[8]) חבר מאזני הטור העליון אל מאזני הטור התחתון[9]) ואם היה העולה בין שניהם כמאזני הטור השלישי[9]) אז תדע כי חשבונך אמת.

ועתה[10]) אפרש היאך יכנס בלוחות חכמת המזלות והיאך יצרף שניים לראשונים וראשונים למעלות ומעלות למזלות ועתה אתן לך דרך כוללת בחכמת המזלות. חלקו הגלגל על י״ב מזלות והמזל על ל׳ מעלות והמעלות [0]הם כמו אחדים[11]) במספר וכל מעלה[12]) מתחלקת [0]על ששים[13]) יקראו ראשונים גם כל ראשון יתחלק לששים עוד[4]) ויקראו שניים ואין בלוחות המשרתים שברים יותר מאלה ודע כי לוחות המשרתים במהלך האמצעי על שני דרכים האחד על שנות השמש והם שנות הכלל מחוברים עשרים עשרים והדרך השנית על שנות הלבנה ושנות הכלל מחוברים[14]) שלשים שלשים ובספר טעמי הלוחות אפרש זה[4]) והנה ברצותם לדעת מקום איזה משרת שיבקשו באיזו שעה שירצו[4]) יכנסו בשנות הכלל שעברו ויכתבו מה שימצאו כתוב שם ממספר המזלות ויכתבו זה בתחלת הטור ואח״כ יכתבו מה שימצאו במעלות אחרי[15]) המספר הראשון באותו [0]הטור בעצמו[16]) וישימו הפרש בין שני המספרים בקו ארוך אח״כ יכתבו מה שימצאו מן הראשונים אחרי המעלות והמזלות וישימו הפרש בין[17]) המספרים בקו ארוך באותו טור[18]) בעצמו ואח״כ ישימו שניים[19]). אחרי הראשונים באותו הטור בעצמו ויפרישו ביניהם בקו ארוך ואח״כ יכנסו בשנות הפרט שעברו ויכתבו מה שימצאו במזלות תחת המזלות והמעלות תחת המעלות והראשונים תחת הראשונים והשניים תחת השניים ואח״כ יכנסו כנגד החדשים שעברו ויכתבו כל מה שימצאו שם כל מין תחת מינו ואח״כ יכנסו בימות[20]) החדש[21]) שעברו על[22]) החדש [0]שלא נשלם[23]) ויכתבו כל מה שימצאו[24]) כנגדם כל מין תחת מינו וככה יעשו בשעות השלמות שעברו אחר חצי היום וככה בחלקי השעה שלא נשלמה ואח״כ יחל לחבר כל השניים ויקח לכל ששים שניים חלק ראשון ויכתוב כמה ראשונים יעלו מן השניים עם הראשונים שהם לפני השניים והנשאר מן השניים שהם פחותים מן הששים יכתבם לבדד[25]) במקום אחר[26]) ואח״כ ישוב לחבר כל הראשונים ויקח לכל ששים

1) H: f. 2) H: המאזנים. 3) B: כספר. 4) H: f. 5) H: מעלתו. 6) H: כפי. 7) H: השלישי. 8) H: אח״כ. 9) H: השפל. 10) Von ועתה bis למזלות (folg. Z.) fehlt in H u. M. 11) H: כמו אחדים הם. 12) H noch: ומעלה. 13) H: לששים. 14) H noch: על. 15) H: אחר. 16) H: טור עצמו. 17) H noch: שני. 18) H: הטור. 19) H: השניים. 20) H: בימים. 21) H: f. 22) H: מן. 23) H: ולא הגיע לכלל מזל. 24) H noch: שם. 25) H: לבדם. 26) H: אחד.

ראשונים מעלה אחת ומה[1]) שיתחבר מן המעלות כתוב[2]) אותם עם[3]) המעלות שהיו לפני הראשונים והראשונים הנשארים שהם פחותים מששים כתוב[4]) אותם בטור שכתבת[5]) שם השניים רק יהיו נכתבים לפני השניים ואח״כ שוב לחבר המעלות וקח לכל שלשים מעלות מזל אחד וכתוב המזלות העולים עם כל המזלות שהיו לך ומה[6]) שישארו מן המעלות שהם פחותים משלשים כתוב. אותם לפני הראשונים שכתבת לפני השניים לבדד ואח״כ[7]) הוצא[8]) כל שנים עשר מזלות[9]) שתמצא[10]) והנשאר[9]) כתוב אותם לפני המעלות[11]) שכתבת לפני הראשונים שכתבת לפני השניים לבדד אז יהיה לך מקום המשרת בגלגל המזלות עם מעלותיו וחלקיו ושנייו ולעולם תחל לספור מראש מזל[9]) טלה ואם היה מספר המזלות שנים עשר כתוב במקום הראוי להכתב שם מזלות[12]) גלגל להודיע כי המשרת עודנו במזל[13]) טלה[14]) כי לא נשלם רק עבר מן המזל כפי המעלות שתמצא כתובות ויהיו הראשונים מן המעלה הבאה כי אם היו[13]) המעלות י״ז יהיו הראשונים הם שעברו ממעלת י״ח °ונחשוב כי הראשונים[13]) השלמים היו ט״ו שלמים ונאמר כי השניים היו מ״ה והנה הם שלש רביעיות החלק הראשון של ששה עשר ראשונים[15]).

השער הד׳

°הוא שער החסור[13])

לגרוע חשבון אחד[13]) מחשבון אחר[13]) קל הוא רק אתן לך דרך כוללת לגרוע חשבונים רבים מחשבונים רבים על דרך חכמי המזלות גם על דרך חכמי החשבון כי דרך אחרת יש להם וככה תעשה כתוב החשבון שתרצה לגרוע ממנו בטור העליון וכתוב המספרים שתחפוץ[16]) לגרעם[17]) בטור השפל ולעולם[18]) יהיה מספר[19]) האחרון שבטור[20]) העליון גדול מהמספר[21]) האחרון שהוא[13]) בטור[22]) השפל ואל[23]) תחוש למספרים[24]) האחרים והנה אם מצאת °באחת מן[25]) המעלות מספר הטור השפל גדול מהמספר[26])

1) H: עם מה. 2) H: וכתוב. 3) H: אל. 4) H: יכתוב. 5) H: שכתב. 6) H: עד. 7) Von ואח״כ bis לבדד (Z. 8) fehlt in M. 8) H: תוציא. 9) H: f. 10) H noch: במזלות. 11) H: המזלות. 12) H: המזלות. 13) H: f. 14) H: בטלה. 15) In B folgt hier noch ein Zusatz, anfangend וזה תוספת. 16) H: שתרצה. 17) H: לגרוע אותם. 18) H: לעולם. 19) H: המספר. 20) H: בטור. 21) H: ממספר. 22) H: שבטור. 23) H: ולא. 24) H: מהמספרים. 25) H: באחדות. 26) H: ממספר.

שבטור[1]) העליון שהוא כנגדו השב אחורנית מהמספר שאחריו[2]) אחד לבדו כי יספיק לך וחשוב אותו עשרה על הדרך שאנו[3]) עושים[4]) בחלוק.

ב ג ד ה
ט ז ג ב
ג ה 0 ג

דמיון[5]) הטור העליון ב׳ ג׳ ד׳ ה׳ והטור השפל ט׳ ז׳ ג׳ ב׳ וראוי לגרוע כל אחד מהשפלים[6]) מן העליונים כל אחד ממעלתו ב׳ מה׳ וג׳ מד׳[7]) ולא[8]) נוכל לחסר ז׳ מג׳ ולא ט׳ מב׳ ולעולם נחל לחסר אחורנית כדרך החלוק והנשאר נכתבנו[9]) בטור שלישי כנגד אותה המעלה[10]) שבטור השפל והנה גרענו ב׳ מה׳ נשאר[11]) לנו ג׳ [0]כתבנו אותו[12]) [0]תחת מעלה הרביעית[13]) חסרנו ג׳ מד׳ נשאר לנו אחד ולא כתבנוהו רק שמנו[14]) [0]גלגל במקומו[15]) כי הוצרכנו להשיב אחד[16]) אחורנית כי המספר שבטור[17]) השפל לפניו[13]) גדול משכנגדו העליון והנה היו י״ג חסרנו ממנו ז׳ ונשארו[18]) ו׳ רק בעבור כי[19]) החשבון הראשון שבטור[13]) השפל[20]) גדול מן[21]) העליון שבטור[22]) העליון על כן הוצרכנו להשיב אחורנית אחד ונכתוב[23]) ה׳ בטור השלישי והנה היו[24]) למעלה י״ב נחסר[25]) ט׳ ונשארו[26]) ג׳ [0]וזו היא הצורה[13]) וכאשר תרצה[27]) לדעת המאזנים תגרע[28]) מאזני הטור השפל ממאזני הטור העליון ותשמור[29]) הנשאר ותראה[30]) אם היו[31]) מאזני הטור השלישי כמוהו דע[32]) [0]כי חשבונך[33]) אמת ואם היו מאזני הטור השפל גדול ממאזני הטור העליון הוסף לעולם על מאזני העליון ט׳ ונגרע מהמחובר מאזני השפל ותעשה[34]) כמשפט.

ב 0
ז א
0 ג

דמיון החסרנו[35]) א׳ מב׳ נשאר א׳ השיבונו אחורנית על הגלגל [0]והיו י׳ חסרנו ז׳[13]) נשארו[36]) ג׳ והנה מאזני[37]) השפל ח׳ ומאזני העליון ב׳ הוספנו עליו ט׳ והיו[38]) י״א החסרנו[35]) ח׳ נשארו[39]) ג׳ וככה מאזני השפל. — **עתה** נדבר על דרך חכמי המזלות כי יותר צורך יש להם לשער הזה מחכמי החשבון וכבר הזכרנו כי [0]כן תכון[40]) המזלות במעלה הראשונה והמעלות בשנית והראשונים[41]) בשלישית

---

1) H: הטור. 2) H: שהוא אחריו. 3) H: שאנחנו. 4) B: עושין. 5) H noch: כזה und folgende Figur, welche unvollständig ist.

5	4	3	2
3			
2	3	7	9

6) H: מן השפלים. 7) H noch: וככה הכל. 8) Von ולא bis מב׳ fehlt in H. 9) H: נכתוב אותו. 10) H: מעלה. 11) H: והנשאר. 12) H: כתבנוהו. 13) H: f. 14) H: כתבנו. 15) H: במקומו גלגל. 16) H: אותו. 17) H: שהוא בטור. 18) H: נשארו. 19) H: שהוא. 20) H: בשפל. 21) H: משל. 22) H: בטור. 23) B: ונכתבנו. 24) H: היה und noch לנו. 25) H: חסרנו. 26) H: נשארו. 27) H: נרצה. 28) H: נגרע. 29) H: ונשאר. 30) H: ונראה. 31) H: היה. 32) H: נדע. 33) H: שחשבונו. 34) H: ונעשה 35) H: חסרנו. 36) H: נשאר. 37) B: f. 38) H: יהיו. 39) H: נשאר. 40) H: f. 41) H והחלקים הראשונים.

והשניים ברביעית ולעולם יחלו[1]) לגרוע אחורנית[2]) השניים בטור השפל[3]) מהשניים בטור העליון והנשאר יכתבנהו[4]) בטור שלישי[5]) כנגד השניים העליונים ואם היו השניים השפלים רבים מהעליונים יקח מהראשונים העליונים אחד ויחשבהו[6]) ס' שניים ויחבר אליהם השניים הנמצאים בטור העליון ואח"כ יגרע השניים השפלים כמשפט ואם לקח אחד מהעליונים[7]) יגרענו ממספר הראשונים שהיו שם ואח"כ[8]) יחסר הראשוני' השפלי' מהראשוני'[9]) העליונים הנמצאים שם ויכתוב הנשארים כנגדם בטור השלישי ואח"כ יחסר מעלות ממעלות והנשארים יכתבם בטור השלישי כנגדם ואם היו המעלות בטור השפל רבות ממעלות[10]) העליון יקח מהמזלות אחד[11]) ויחשבנו ל' ויחברם אל המעלות הכתובות שם ואח"כ יגרע וישמר[12]) שיגרע אחד ממספר המזלות הכתובים בראשונה ואח"כ יגרע מזלות[13]) ממזלות ויכתוב הנשארים בטור השלישי כנגדם ואם היו המזלות השפלים גדולים מהעליונים יוסיף לעולם[11]) על העליונים י"ב ואח"כ יגרע ויעשה כמשפט. לדעת המאזנים יחל מהשניים ויגרע מאזני השניים השפלים ממאזני[14]) העליונים וישמור[15]) הנשאר ויראה אם היה כמוהו מאזני השניים בטור השלישי חשבונו אמת ואם ראה שלקח ראשון אחד מהראשונים ושם עם השניים יוסף על מאזני השניים העליונים ו'[16]) ואח"כ [0] יגרע כמשפט[16]) ויעשה[17]) למאזני הראשונים כאשר עשה לשניים ואם[18]) הוצרך לקחת מעלה והשיבה[19]) לס' ראשונים לחברם[20]) עם הכתובים שם הוסף על מאזני[21]) הראשונים שהיו שם ו' ואח"כ תגרע ותעשה כמשפט גם[22]) כן תעשה במאזני המעלות כמשפט הראשונים והשניים ואם לקחת מן המזלות אחד ששמת אותו עם המעלות הוסף על מאזני המעלות שהיו שם בתחלה ג' ואח"כ תגרע ותעשה כמשפט ועשה במאזני המזלות כאשר עשית בכל אלה ואם הוספת על המזלות הראשונים י"ב הוסף על מאזני המזלות הכתובים בראשונה ג' ואח"כ תגרע ותעשה כמשפט. כלל אומר לך דבר שהוא צורך[23]) למגרעת לעולם האחרון[24]) שבסוף הטור העליון יהיה גדול[25]) מהאחרון[26]) שבטור השפל כשהטורים שוים שהעליון כמו התחתון ואם אין הטורים שוים שהעליון גדול מן התחתון במספר אותיות[27]) כזה[28]) ישיב[29]) האחד[30]) אחורנית ודי לו[31]).

---

1) H: יחל. 2) H noch: כי. 3) H noch: יחל לגרוע. 4) H: יכתבו אותו. 5) H: השלישי. 6) H: ויחשוב אותו. 7) H: מן העליונים. 8) H: אח"כ. 9) H: מן הראשונים. 10) H noch: הטור. 11) H: f. 12) B: וישמור. 13) H: המזלות. 14) H noch: השניים. 15) B: וישמר. 16) H: f. 17) H: יעשה. 18) H: וגם הוא. 19) H: והשיב אותה. 20) H: לחבר אותם. 21) H noch: הששים. 22) Von גם bis לך (Z. 25) fehlt in H. 23) H: צריך. 24) H: אותו. 25) H noch: מאותו. 26) H: האחרון. 27) H noch: סימנם. 28) Die Figur fehlt 29 H: נשיב.. 30) H: אחד. 31) H noch: דרך אחרת לגרוע חשבון

השער הה׳

[0]הוא שער השברים[1])

ידוע כי האחד כמו נקודה בתוך עגולה על כן לא יתכן להיות האחד נשבר רק בעבור שיקרא הכלל בשם אחד כמו הצורה שהיא כוללת כל הגוף והגוף מורכב משטחים[1]) ובעבור זה יעשה האדם[2]) מן האחד שברים במחשבה[3]) ושברי שברים וחכמי החשבון יקחו כל שבריהם מחשבון גדול שיהיו שבריו אחדים שלמים על כן יוציאו החצי משנים והשליש משלשה וככה עד סוף המערכת הראשונה בחשבון [0]והדמיון שיקחו ממנו יקראוהו[4]) המורה כי על מרובעו יחלקו העולה בחשבון והנשאר שלא יתחלק יהיה חלק ממנו או חלקים שיוכל להזכירו[5]) בשם האחדים כמו רביעית שלישית[6]) והדומה להם ויש פעמים שיהיה המורה חשבון שאין לו חלקים שיוכל האדם לבטא בהם כי הוא חשבון ראשון איננו מורכב כמו י״א או י״ג והדומים להם וכבר הזכרתי כי המערכת הראשונה ט׳ מספרים והנה האחד מפאה אחד[7]) איננו מספר ומפאה אחרת הוא מספר והוא[8]) דומה[9]) לנפרד כי בחברך כל הנפרדים זה על[10]) זה על הסדר[11]) יולדו המרובעים ודברים רבים אין צורך להזכירם והנה נשארו[12]) במערכת הראשונה שמנה מספרים והנה חציים ראשונים [0]וחציים מורכבים הראשונים[8]) הם[13]) שנים שלשה חמשה[14]) ושבעה והמורכבים ארבעה ששה[15]) שמנה[16]) ותשעה וכאשר יצטרכו לשנים שברים שאינם ממין אחד שלם[8]) שלא ידמה[17]) זה לזה יבקשו כל אחד מהשברים[18]) מאיזה חשבון יצא כל אחד

מחשבון בהפך שכתוב למעלה שיחל לגרוע מן האחדים. דמיון רצינו לגרוע ט׳ מב׳ והנו כזו הצורה נקח מג׳ שלפניו ויחזירנה לאחור ויהיו י״ב נשארו ג׳ ויכתבם בטור השלישי ועתה נרצה לגרוע ד׳ מג׳ ולא נוכל כי לא נשאר במקום הג׳ כי אם ב׳ נקח מן הד׳ א׳ ונחזירהו לאחור על הג׳ שהוא ב׳ ויהיו י״ב גרע מהם ד׳ וישארו ה׳ ונכתבנו בטור השלישי כנגד הד׳ ואחר כן נגרע ג׳ מד׳ שהוא ג׳ שכבר חסרנו ממנו א׳ ויצא זה כנגד זה לכן נכתוב גלגל בטור השלישי תחת הג׳ ואחר כן נגרע מה׳ וישארו ג׳ ונכתבנה בטור השלישי תחת הב׳.

ה	ד	ג	ב
ב	ג	ז	ט
ג	0	ה	נ

1) H: f. 2) H: אדם. 3) In H steht במחשבה schon vor מן. 4) H: ויקראו אותו שיקחו הדמיון ממנו. 5) H: להזכירם. 6) H noch: או תשיעית, ebenso B am Rande mit der Bemerkung ס״א. 7) H: האחת. 8) H: f. 9) H: ודומה. 10) H: אחר. 11) H, M: סדר החשבון, ebenso B am Rande mit der Bemerkung ס״א. 12) B: נשאר. 13) H: והם. 14) H: וחמשה. 15) H: וששה. 16) H: ושמנה. 17) H: ישוו. 18) H: מן השברים.

מהם ויכפלו[1]) חשבון[2]) האחד על האחר[3]) והעולה בחבור[4]) הוא המורה ואם היה ג׳ מינים יכפול החשבון שיצאו ממנו השברים על החשבון השני[2]) שיצאו ממנו שברי השני והמחובר יכפלהו[5]) על המספר[6]) שיצאו ממנו שברי השלישי וככה יעשה[7]) אם היו ד׳ מינים או יותר כי יבקשו מורה אחד לכלם תקרא בשם הזה בעבור כי הוא יורה הדרך הישר ואם תרצה קרא לו שם אחר °כי לא[8]) יזיק ואחר שאומר[9]) לך דרכי זה המורה אומר לך איך תוכל להוציא שני[10]) שברים משני מורים כי הם יותר °דרך קצרה[11]) ואחר שאשלים לדבר על שברי דרך חכמי החשבון ומחלוקתיהם[12]) אפרש לך שברי חכמי המזלות כי[13]) דרך אחרת להם[14]) ואחל לתת לך דמיונות[15]) מן הקלים ואח״כ אזכיר הכבדים ואומר לך כלל בתחלה כי כפלי[16]) השברים הפך כפלי השלמים כי האומר כפול חצי על חצי כאלו אומר קח חצי החצי והנה העולה רביעית אחד ידענו כי החצי יצא משנים והנה חציו אחד וחצי האחר[17]) גם הוא אחד והנה אחד על אחד אחד והנה מרובע המורה ד׳ והנה[18]) זה האחד הוא רביעי[19]) והוא חצי החצי והנה נעשה להפך מנהגנו בשלמים כי נבקש לעולם מהו[20]) ערך הנכפל ממרובע[21]) המורה וכפל[22]) שלישית על שלישית יהיה העולה תשיעית וכפל רביעית על רביעית יהיה העולה[14]) י״ו והנכפל אחד[23]) והנה הוא חצי שמינית ועל זה הדרך עד עשרה וככה למעלה ממנו כמו חלק אחד מי״א כפל[24]) על חלק אחד מי״א והנה חלק אחד מקכ״א שהוא המרובע ועל זה הדרך תכפל שברי מין[25]) האחד על שברי המין בעצמו בין שיהיו שוים[26]) או שיהיה אחד מהם גדול מהאחר ואח״כ תחלק על מרובע המורה הנכפל. דמיון רצינו לכפול ג׳ רביעיות על ג׳ רביעיות והנה המורה ד׳ לקחנו לכל אחד מג׳ רביעיות ג׳ והנה הנכפל ט׳ חלקנו °אותם על[27]) י״ו שהוא מרובע המורה[28]) הנה[29]) הוא חציו וחצי שמיניתו $^{3}/_{4}\ ^{3}/_{4} = {}^{9}/_{16}$ ואם תרצה חלק ט׳ על ד׳ והדבר יצא שוה כי רביעית הרביעית[30]) חצי השמינית.

---

[1]) H: ויכפל. [2]) H: f. [3]) H: האחר. [4]) H: בחשבון. [5]) H: יכפל אותו. [6]) H: החשבון. [7]) H: יעש. [8]) H: שלא. [9]) M: שאמרתי, ebenso B am Rande. [10]) B: f., jedoch am Rande mit der Bemerkung ס״א. [11]) B: קצרה דרך. [12]) H: ומחלקותיהם. [13]) H noch: הם. [14]) H: f. [15]) H noch: ואחל. [16]) B: בכפלי. [17]) B u. H: האחר. [18]) H: הנה. [19]) H: רביע. [20]) H: מה הוא. [21]) H: מן המרובע. [22]) H: והנה כפל. [23]) H: יהיה חלק אחד מי״ו. [24]) H noch: אותו. [25]) H: המין. [26]) H: שלמים. Die folgenden Worte bis הנכפל (folg. Z.) lauten in H so: או שיהיו נשברים או איזה מהם שיהיו גדולים אח״כ תחלק מרובע המורה על הנכפל [Rand: נ״א אחר כן חלק הנכפל על מרובע המורה]. [27]) H: f. [28]) H noch: עליו; am Rande noch: נ״א חלקנום על י״ו שהוא מרובע המורה. [29]) in B doppelt (Ende und Anfang d. Zeile). [30]) H noch: הוא.

דמיון בקשנו לכפול ג׳ חמישיות על ד׳ חמישיות והנה המורה ה׳[1] לקחנו בעבור הג׳ חמישיות[2] ג׳ ובעבור הד׳ חמישיות[2] ד׳ כפלנו ד׳ על ג׳ עלו י״ב והוא הנכפל[3] והנה ב׳ חמישיות המרובע וב׳ חמישיות חמישית. ואם אמר[4] שברים מב׳ מינים שיאמר כפול לי ב׳ שלישיות אחד[2] על ג׳ רביעיותיו[5] נבקש המורה לשניהם ונכפול[6] ג׳ על ד׳ והוא המורה[7] והנה נקח בעבור ב׳[8] השלישיות[9] ח׳ וג׳ רביעיות[10] ט׳[11] נכפול °ח׳ על ט׳[12] יעלו ע״ב והוא חצי קמ״ד שהוא מרובע המורה ועלה[13] בחשבון מחצית[14] אחד שוה[15] ואם[16] תכפול ב׳ על ג׳ יהיה כמו כן מחצית המורה שהוא י״ב ואם עשית זה מב׳ מורים יהיה הדבר יותר קל ואין צורך למרובע המורה רק הסתכל[17] לעולם אל הנכפל העולה מכפל המורה האחד על האחר[18] וחשבהו[19] כמו[20] המרובע ועליו תחלק[21]. דמיון לקחנו המורה האחד ג׳ בעבור °כי אמר[22] שלישיות והמורה[23] האחד ד׳ בעבור °כי אמר[24] רביעיות[25] נכפול המורה האחד[26] שהוא ג׳ על המורה האחר[26] שהוא ד׳ ועלו[27] י״ב והוא המבוקש כי העולה נקח ערכו[28] אליו ונקח[29] בעבור הב׳[30] שלישיות שנים כי מג׳ לקחנוהו[31] ומג׳[32] רביעיות שלשה כי מד׳ לקחנוהו[31] ונכפול[33] ב׳ על ג׳ עלו[34] ו׳ והוא חצי מספר[35] הנכפל מהמורים[26]. **שאלה** כמה ד׳ שביעיות כפולים[36] על ז׳ תשיעיות נבקש[37] מורה אחד לשניהם והנו[38] ס״ג °בכפל ז׳ על ט׳[39] וד׳ שביעיותיו הם ל״ו כי השביעית[40] ט׳ וז׳ תשיעיות[40] מ״ט °כי התשיעית ז׳[26] ונכפול[33] ל״ו על מ״ט עלו[24] °אלף ותשס״ד[41] ומרובע המורה[42] ג׳ אלפים וט׳ מאות וס״ט

1) H noch: והנה כ״ה והמרובע. 2) H: f. 3) H noch: חלקנו כ״ה שהוא מרובע המורה עליו (Rand: נ״א חלקנום על כ״ה שהוא מרובע המורה). 4) H noch: שני. 5) H: רביעיות. 6) H: והנה נכפול. 7) H noch: והם י״ב ומרובעו קמ״ד. 8) H: הב׳. 9) H: שלישיות (Rand: י״ב). 10) H noch am Rande: י״ב. 11) H noch: והנה und am Rande: כי ב׳ פעמים ד׳ שהוא שלישית י״ב הם ח׳ וג׳ רביעיות י״ב הם ט׳. 12) H: ט׳ על ח׳. 13) H: והנה עלה. 14) H: חצי. 15) H: בשוה. 16) Von ואם bis י״ב fehlt in H. 17) H: תשתכל. 18) H: האחד. 19) H: וחשוב אותו. 20) In B übergeschrieben: כמה. 21) B: f. 22) H: שאמר und noch שתי. 23) H: ונקח המורה. 24) H: שאמר. 25) H: רביעית und noch הנה. 26) H: f. 27) H: ויעלו. 28) H: ערכנו. 29) H: והנה נקח. 30) H: ב׳. 31) H: לקחנו אותו. 32) H: ובעבור ג׳. 33) H: והנה נכפול. 34) H: יעלו. 35) H: המספר. 36) H: הכפולים. 37) B: ובקש. 38) H: והוא. 39) H: כי ז׳ פעמים ט׳ יעלו ס״ג. 40) H noch: הם. 41) H: א׳ ז׳ ו׳ ד׳ (Rand: אלף ותשס״ד). 42) H noch: ג׳ ט׳ ו׳ ט׳. Die folgenden Worte von ג׳ bis וס״ט stehen in H am Rande.

וכאשר חלקנו חשבוננו[1]) הראשון על ס"ג עלו כ"ח °שהם ד' על ז'[2]) והם °מן ס"ג[3]) ד' תשיעיות שלמות או אם תרצה[4]) לומר[5]) שהם ג' שביעיות ותשיעית שביעית ואם לקחנו בב' מורים יהיה הנכפל ס"ג והעולה בידנו בכפל כ"ח והנה הדבר שוה ואם[6]) היו שברים מג' מינים כמו ב' שלישיות וה' ששיות וד' שביעיות קח להם מורה אחד והוא שנכפול ג' על ו' עלו י"ח עוד נכפול י"ח על ז' עלה קכ"ו והוא המורה הנה ב' שלישיות קכ"ו פ"ד וה' ששיות ק"ה וד' שביעיות ע"ב כפלנו פ"ד על ק"ה והמחובר על ע"ב והעולה מהם בחלוק הוא חלק ממרובע קכ"ו והחלוק יהיה מ'. ואם נקח להם ג' מורים מפני היותם ג' מינים לא תצטרך למרובע המורה אבל תקח המורה עליו תחלק °הנכפל מהמספרים[7]). דמיון כפלנו ב' על ה' עלו י' כפלנו י' על ד' עלו מ' והוא חלק מקכ"ו שהם ב' שביעיות וב' תשיעיות השביעית או תעשה כן כפול ג' על ו' והוא י"ח והוא המורה וכפול ב' על ה' יהיו י' נקח ד' שביעיות מי' יהיו ב' שביעיות וב' תשיעיות השביעית או כפול ו' על ז' והיו מ"ב והוא המורה וכפול ה' על ד' יהיו כ' נקח ב' שלישיות מכ' יהיו ב' שביעיות וב' תשיעיות השביעית או כפול ג' על ז' עלו כ"א והוא המורה ואח"כ כפלנו ב' על ד' עלו ח' לקחנו ה' ששיות והעולה הוא חלק מכ"א.

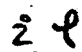
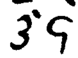
63	
4/7 7/9	
0	36
02	49
500	1254
1764 | 28	24
63	27
	1764
4/9 28/63	

ואם היה לנו שלמים עם מספר שאין שם שלמים כי אם שברים נקח השברים מהמורה ולכל[8]) שלם נתן לו מורה שלם במספר המורה השלם[9]) ונחלק באחרונה על המורה. דמיון רצינו לכפול ד' שלמים על ג' חמישיות אחד והמורה[10]) ה' ובעבור שיש לנו ד' שלמים נקח להם כ'[11]) ונכפול ד' °על ג'[12]) ונחלק בה'[13]) יעלו ב' שלמים וב' חמישיות ואם רצינו לכפול שלמים ושברים על[14]) שלמים ושברים שהם ממין אחד נכפול בתחלה השלמים[15]) על השלמים[15]) ואח"כ[16]) °הנשברים על השלמים[17]) של חשבון[18]) האחד גם השלמים[19]) של חשבון האחר על[14]) הנשברים[20]) של החשבון האחד[21]) ואח"כ הנשברים[22]) על הנשברים או נשיב הכל נשברים

1) H: חשבונו. 2) H: f. 3) H: מכ"ג. 4) H: נרצה. 5) H: נאמר. 6) Von ואם bis מכ"א (folg. Absatz) fehlt in H. 7) B: המספרים הנכפל. 8) H: וכל und noch: חשבון. 9) H: שלם. 10) H: המורה הוא. 11) H: ד'. 12) H: בג'. 13) H: על ה'. 14) H: עם. 15) H: שלמים. 16) H noch: נכפול. 17) H: שלמים על נשברים. 18) H: החשבון. 19) H: הנשברים. 20) H: שלמים. 21) H: האחר. 22) H: שלמים.

ונכפול[1] אלה על אלה והעולה נחלקנו על מרובע המורה. דמיון[2] רצינו[3] לכפול ד׳ שלמים וב׳ חמישיות על ה׳ שלמים וג׳ חמישיות כזה $5\frac{3}{5}$ $4\frac{2}{5}$ נכפול[4] תחלה[5] השלמים[6] על השלמים[6] עלו[7] כ׳ אח״כ[8] נכפול ד׳ על ג׳ יהיו י״ב [0]חמישיות שברים[9] גם ב׳ על ה׳ יהיו י׳ שברים במיניהם והנה כ״ב שברים ואח״כ נכפול השברים על השברים ב׳ על ג׳ יעלו ו׳ והם שברי שברים במעלה השלישית[10] השלמים נחלקם על ה׳[11] שהוא המורה עלה שבר אחד ונשאר לנו במעלה השלישית אחד שהוא שבר השבר והשבר שעלה בידנו נחברנו אל כ״ב שהיה לנו הנה[12] כ״ג נחלקם על ה׳ עלו ד׳ שלמים ונשארו ג׳ והנה השלמים כ״ד והשברים[13] ג׳ שהם ג׳ חמישיות שהם ט״ו מכ״ה שהוא המרובע ושבר השבר שהוא חומש החומש שהוא והם י״ו מכ״ה והדרך האחרת לקחנו לד׳ השלמים כ׳ הוספנו עליו ב׳ שהם השברים עלו כ״ב חומשין[14] והוא החשבון האחד גם השני על [0]הדרך הזאת[15] כ״ח[16] נכפול זה על זה ונחלק העולה על המרובע שהוא[17] כ״ה יעלו כ״ד וישארו י״ו שלא יתחלקו. דמיון[18] אחר רצינו לכפול ג׳ שלמים וד׳ חומשין על ב׳ שלמים וג׳ חומשין כזה $2\frac{3}{5}$ $3\frac{4}{5}$ נכפול תחלה שלמים על שלמים והם ו׳ ואח״כ נכפול שלמים על שברים האלכסונין ג׳ על ג׳ והם ט׳ וב׳ על ד׳ והם ח׳ ובין הכל י״ז שברים ממעלה העליונה ונכפול שברים על שברים ד׳ על ג׳ והם י״ב שברי שברים מהמעלה השנית נחלקם על ה׳ עלו בידנו ב׳ שברים והנשאר ב׳ שברי שברים שלא עלה בחלוק נחבר מה שעלה בחלוק עם השברים שהוא י״ז והם י״ט נחלק על ה׳ עלו ג׳ שלמים נחברם אל השלמים שהיו ו׳ והם ט׳ נשארו ד׳ שהם כ׳ שברי שברים ועם שנים שהיו לנו הם כ״ב והנה סך הכל ט׳ שלמים וכ״ב שברים מכ״ה השלם. דמיון רצינו[14] לכפול שלמים ושברים על שלמים ושברים שאין השברים ממין אחד הנה[19] על הדרך הזה[14] האחד ג׳[14] שלמים וד׳[14] חמישיות[20] והשני[21] ו׳[14] שלמים וז׳[14] שמיניות[22] כזה[14] $6\frac{7}{8}$[23] $3\frac{4}{5}$ כפול[24] האחרים על[25] האחרים שהם[26]

---

1) H: ויכפול. 2) H noch: חמישיות 
חמישיות  3) Von רצינו bis כזה fehlt in H. 4) H: והנה נכפול. 5) H: בתחלה. 6) H: שלמים. 7) H: יעלו. 8) H: ואח״כ. 9) H: f. 10) H: שלישית und noch מן. 11) H: הה׳. 12) H: והנה הם. 13) H: והנשברים. 14) H: f. 15) H: זה ה׳ שלמים וג׳ חומשים הם כ״ח כפול כ״ב על הדרך und noch עלו. 16) H noch: כ״ח כי מן השברים לקחנו המורה. 17) H: שהם. 18) Von דמיון bis השלם (Z. 23) fehlt in H. 19) H: והנה נעשה. 20) H noch am Rande: ג׳ שלמים ד׳ חמישיות. 21) H: והדרך השני. 22) H noch am Rande: ו׳ שלמים ז׳ שמיניות. 23) B: $6\frac{8}{7}$. 24) H: והנה כפל. 25) H: עם. 26) H: שוים.

במספר[1]) הראשון גם[2]) כפול[3]) השברים על[4]) השברים במשפט[5]) כי [0]כפל השברים על השברים[5]) הם חלקי המורה רק יש לנו לשמור כשנכפול השלמים על השברים כי אין מחלקותם שוה והנה נכפול[6]) שלמים על שלמים ג׳ על ו׳ עלו[7]) י״ח ונכפול עוד אלו[8]) ג׳ על שברי החשבון שהם ד׳ יעלו כ״א נחלקם על ח׳ [0].כי שמיניות[9]) הם יעלו ב׳ שלמים והנה כ׳ שלמים ונשארו[10]) ה׳ שמיניות ידענו כי המורה הוא מ׳ [0]כי תכפול ה׳ על ח׳[6]) ואלה[11]) הה׳ שמיניות[12]) כ״ה חלקים [0]כי תכפול ה׳ על חמישיות שהם ה׳[6]) ונשוב[13]) לכפול הו׳ על ד׳ חמישיות יעלו כ״ד נחלקם[14]) על ה׳ יעלו ד׳ שלמים [0]והנה יהיו השלמים כ״ד[6]) וישארו[15]) ד׳ חמישיות[16]) והם ל״ב חלקים [0]כשתכפול ד׳ על ח׳[6]) נחבר אליהם הכ״ה[17]) חלקים שהיו לנו יעלו[18]) נ״ז חלקים נעשה מהם אחד שלם מארבעים ויהיו כ״ה שלמים ונשארו[19]) י״ז אח״כ נכפול ד׳ על ז׳ יעלו[20]) כ״ח חלקים נחבר אליהם י״ז יהיו מ״ה והנה נתן[6]) אחד שלם ממ׳ ויהיו השלמים כ״ו והנשאר ה׳ חלקים שהם שמינית אחד. ודרך חכמי החשבון שיבקשו לשברים שאינם ממין אחד מורה אחד כולל שניהם ומספר המורה הוא אחד שלם ובעבור כי השברים הם חמישיות ושמיניות יהיה המורה ארבעים והנה נקח לחשבון שהוא ג׳ ק״כ ולד׳ חמישיות ל״ב הנה המספר קנ״ב [0]וזה צורת האותיות[6]) ונקח לו׳ השלמים ר״מ ונחבר[21]) אליהם ל״ה שהם ז׳ שמיניות יהיה המספר השני רע״ה והנה נכפול זה על זה[22]) והנה עלה מ״א[23]) אלף וח׳ מאות [0]וזו הצורה[6]) חלקנום על אלף ושש מאות שהוא מרובע המורה עלו כ״ו שלמים נשארו ר׳[24]) שלא עלו בחשבון ובקש מהו[25]) ר׳[6]) [0]מן המרובע[26]) שהוא אלף ושש מאות והנה הוא שמיניתו ונוכל לדעת זה הנשאר בדרך

```
152
275
-----
13110
2744
25
5
5
-----
41800
```

```
      0
     03
    292
   41800
26| 1600
```

[1]) H: כמשפט. [2]) H noch: כן. [3]) H: כפל. [4]) H: עם. [5]) H: f. [6]) H: f. [7]) H: יעלו. [8]) H: זה. [9]) H: שמיניות כי. [10]) H: וישארו. [11]) H: והנה אלה. [12]) H noch: הם. [13]) H: והנה נשוב. [14]) H: נחלק אותן. [15]) H: ונשארו. [16]) H: חמישיות. [17]) H: כ״ה. [18]) H: ועלו. [19]) H noch: נ״ז[ם übergeschrieben]. [20]) H: יהיו. [21]) H: נחבר. [22]) Hier steht in H am Rande folgende Bemerkung:))חזור לאחור עלה אחד ותראה. Auf dem Blatte vorher findet man unten am Rande dasselbe Zeichen)), dahinter folgendes: תכפול קנ״ב על רע״א (!) והנה אתה צריך לכפול ט׳ פעמ׳ ככת׳ בשער הראשון כזאת הצורה ואם תקח כל אחד כפי מעלתו ותחברם יצאו לך מ״ז (!) אלפים ות״ת

י	ד	א	ג	ב
	0	ה	ד	י
	0	0	ב	ז
	0	0	ה	
		0	ה	

ב	ה	א
ה	ז	ב

[23]) H: מ״ו (!). [24]) H: ד׳. [25]) H: מה הם. [26]) H: מהמרובע.

אחרת שנחלק[1] לעולם הנשאר מהמרובע על המורה בעצמו והעולה הם חלקים ממנו והנה נחלק ר׳[2] על מ׳ עלו ה׳ שהוא שמיניתו. **דרך אחרת** מב׳ מורים הנה נשים החשבון האחד שהוא[3] ג׳[4] ט״ו ונחבר אליהם ד׳ יהיה החשבון הראשון י״ט נקח לששה מ״ח נחבר אליהם ז׳ יעלו נ״ה והוא החשבון השני נכפול זה על זה יעלו[5] אלף ומ״ה נחלק אותו על הנכפל שהוא כפל [0]ה׳ על ח׳[6] [0]והוא מ׳[7] ויעלו כ״ו שלמים נשארו ה׳ שהוא[3] שמינית ועתה[8] יש לנו לדבר על שלמים[9] ונשברים שלא יוכל האדם לבטא בהם והנה אם היה[10] אחד[11] מהשברים[12] שיוכל לבטא בהם והאחרים[13] שלא יוכל לבטא בהם יעשה[14] ככה. **דמיון** כמה שלש שביעיות אחד על ה׳ חלקים מי״א [0]כי הוא[15] השלם ולא יוכל אדם לבטא בו והנה נכפול השברים על השברים והנה יהיה המורה ע״ז והנה יש לנו להשמר כי השברים יהיו להפך כי כל אחד מהז׳ יהיו י״א וכל אחד מהי״א יהיו ז׳ והנה נקח בעבור ג׳ שביעיות ל״ג ובעבור ה׳ חלקים מי״א[16] נקח ל״ה והנה נכפול אלה על אלה עלו[17] אלף קנ״ה[18] נחלקם[19] על ע״ז עד שנדע כמה הם השברים העולים מזה הכפל אל ערך ע״ז שהוא השלם והם[20] ט״ו והנה מן ע״ז פחות מעט מחמישית אחד ועל דרך דקדוק[21] יפה נחלק אלה ט״ו על י״א שהוא השביעית יעלה שביעית [0]אחד שלם[22] וד׳ חלקים מי״א ואם נחלק על ז׳ יעלו ב׳ חלקים מי״א ושביעית חלק. **דמיון** אחר לב׳ שברים שלא יוכל האדם לבטא בהם נשים[7] החשבון האחד י״ג והשני י״ט והנה בקשנו לכפול ט׳ חלקים מי״ג על י״ז חלקים מי״ט[23] נבקש בתחלה המורה בזה הדרך שנכפול י״ג על י״ט ועלה המספר רמ״ז והוא המורה אח״כ[24] כפלנו ט׳ בי״ט ועלה קע״א וכפלנו י״ז בי״ג ועלה רכ״א והנה כפלנו זה על זה והיה העולה ל״ז אלפים ותשצ״א חלקנום[25] על רמ״ז והיה קנ״ג והנה העולה מכפלנו[26] ט׳ בי״ז הוא[27] נ״כ קנ״ג וערך[28] זה אל רמ״ז כערך[29] המספר הראשון אל המרובע[30] רמ״ז והוא המבוקש ואם תרצה לדקדקנו חלק קנ״ג על י״ט ויהיו[31] ח׳ חלקי׳ מי״ג וחלק אחד מי״ט בי״ג[32]

0
010
0172 153
13040
37791
247

---

[1] H: שתחלק. [2] B: ח׳. [3] H: שהם. [4] H noch: נשים אותם. [5] H: עלו. [6] H: ח׳ על ה׳. [7] H: f. [8] H: עתה. [9] H: השלמים. [10] H: היו. [11] H: אחר. [12] H: השברים. [13] H: והאחרים. [14] H: עשה [15] H: שהוא. [16] H: י״א.. [17] H: יעלו. [18] H: וקנ״ה. [19] H: הנה נחלק אותם. [20] H: שהם. [21] H: הדקדוק. [22] H: אחת שלימה. [23] H noch: והנה. [24] H: ואח״כ. [25] H: חלקנו אותם. [26] H: מכפל. [27] H: והוא. [28] H: נעריך. [29] H: בערך. [30] H: כרובע. [31] H: יהיה. [32] H: f; in B übergeschrieben.

או אם תרצה חלקהו על י"ג ויהיו י"א חלקי' מי"ט ו' חלקים מי"ג בי"ט[1]) ואם היו לך שלמים עם שברים שהם בדרך[2]) זה[3]) עשה כדרך שהראיתיך כשיהיו לך[4]) שלמים עם שברים שתוכל[5]) לבטא בהם והזכרתי זה הדרך כי צורך גדול יש אליו ברובי השאלות ובדברי[6]) המרובעים לדעת שרשיהם כשהם נשברים ולא יוכל האדם[7]) לבטא בהם כמו[8]) שאפרש בשער השביעי[9]) ואומר לך דרך כוללת לשבר[10]) שברי הנשברים[11]) ואתן[12]) דמיון אחד ויספיק[13]) לך[4]) כי אין צורך לדבר הזה[14]) בערכים ולא בשרשים ולא בשאלות. **דמיון** כפלנו ב' שלישיות רביעית חמישית[15]) על שש שביעיות שמינית והנה השברים רבים אך[16]) אלמד לך דרך קצרה איך תעשה דע כי מאחר[17]) שיש לך ששיות[18]) ושמינית[4]) אין צורך[19]) לשלישית[20]) ורביעית[4]) והנה[21]) נבקש חשבון שיש לו חמישית וששית ושביעית ושמינית נכפול ה' [0]על ו'[22]) יעלו[23]) ל' גם ל'[24]) על ז' יהיו ר"י גם ר"י[24]) על ח' יעלו[23]) אלף ו' מאות ופ' והנה נבקש המספר הראשון והנה חמישית המורה של"ו ורביעיתו פ"ד וב' שלישיותיו נ"ו וזהו[25]) החשבון האחד וכבר ידענו כי השמינית ר"י ושביעיתו[26]) ל' ובעבור שהם ד' שביעיות יהיה[27]) המספר השני ק"כ[28]) נכפול זה על זה יהיה[29]) המספר י' אלפים ופ' חלקנו זה על אלף ו' מאות ופ' עלו ו' ואלה הו' הם חמישית שמינית השביעית שהשביעית ר"מ והשמינית ל' והחמישית[30]) ו'[31]) .ועתה[32]) נשוב לדבר על חלוק השברים עשה כדרך שהראיתיך שתשיב הנשברים אחדים שלמי'[33]) ואם היו שלמים עם השברי'[34]) עשה כמשפט. **דמיון** בקשנו לחלק נ' שלמים ושתי חמישיות על ב' שלמי'[33]) וד' שביעיות אחר[33]) והנה המורה ל"ה והנ' שלמים ק"ה וב' חמישיות י"ד והנה החשבון קי"ט ונשיב הב' השלמים האחדים

	105		35
70	14	$3\,^2/_5$	$2\,^4/_7$
20	119		
90	02		
	119	1		
	90		

ע' והד' שביעיות כ' הנה[35]) צ' חלקנו[36]) קי"ט עליו עלה אחד שלם ונשארו כ"ט שהם שתי[37]) תשיעיות ועשירית אחד. **דמיון** לנשברים לבדם חלק ז'

---

1) H: f; in B übergeschrieben. 2) H: כדרך. 3) H: הזה. 4) H: fehlt. 5) H: כשתוכל. 6) H: גם בדברי. 7) H: אדם. 8) H: כאשר. 9) H: noch: בע"ה. 10) H: לשברי. 11) H: השברים. 12) H noch: לך. 13) B: ואספיק. 14) H noch: לא. 15) H: החמישיות. 16) H: רק. 17) H: אחר. 18) H noch: ששית. 19) H: אנו צריכין. 20) H noch: ואחר שיש לנו שמינית אין אנו צריכין לרביעית. 21) H noch: עתה 22) H: בו'. 23) H: יהיו. 24) H: זת. 25) H: זהו. 26) H: והנה שביעיתו. 27) H: הנה. 28) H: ק"ס und noch והנה. 29) H: והנה. 30) B: וחמישית. 31) B: ל"ו. 32) H: עתה. 33) H: f. 34) H: הנכשברים. 35) H: והנה הם. 36) H: בחלק. 37) H: שני.

תשיעיות על ב׳ שביעיות והנה המורה ס״ג ושבע[1]) תשיעיותיו מ״ט וב׳
שביעיותיו י״ח[2]) חלקנו זה על זה עלו[3]) ב׳ וו׳[4]) תשיעיות וחצי תשיעית
ועל[5]) זה הדרך תעשה כי אין צורך גדול לחלק הנשברים. ונשוב לדבר על
תבורם[6]) חברנו ב׳ חמישיות אחד על ה׳ שביעיות אחד כמה העולה הנה
המורה ל״ה וב׳ חמישיותיו י״ד וה׳ שביעיותיו כ״ה נחברם והנה[7]) ל״ט נקח[8])
בעבור ל״ה אחד שלם ונשארו ד׳ שהם ד׳ חמישיות[0] מהשביעית שהם[9]) אחד
מל״ה[9]). **שאלה** חברנו אל[10]) ממון תשיעיתו ועשירתו והיו נ׳[11]) נשים
המורה צ׳ וידוע כי תשיעיתו ועשיריתו י״ט נוספים[12]) על צ׳ יהיו ק״ט והנה
גם[13]) נשיב[14]) הנ׳ [0]מערך התשיעית[15]) יהיו ד׳[16]) מאות ונ׳ נשיב הד׳
מאות ונ׳ מערך העשירית יהיו ד׳ אלפים ות״ק נחלק זה[17]) על ק״ט ויעלו
מ״א שלמים גם ל״א חלקים מזה שחלקנו עליו והנה נבחן אם זה אמת ידענו
כי עשירית מ׳[18]) ד׳ שלמים ונקח לאחד שנשאר[19]) ק״ט נחבר אליו ל״א
שהם יתרים על השלמים הנה[20]) ק״מ ועשיריתם י״ד ואלה הם חלקי העשירית
הנוספים על השלמים ונשוב לקחת התשיעית והנה מל״ו [0]ד׳ שלמים[21])
ונשארו ה׳ שלמים נשים כל אחד ק״ט יהיו תקמ״ה נחבר אליהם ל״א היתרים
על השלמים יהיו[22]) תקע״ו ותשיעיתם ס״ד נחבר אליהם[23]) י״ד שעלו מן
העשירית יהיו ע״ח גם נחבר אליהם ל״א היתרים יהיו ק״ט והנה[24]) אחד
שלם והנה הכל נ׳ שלמים[25]). **שאלה אחרת** לקחנו[26]) חמישית ממון
[0]גם שביעיתו[27]) ותשיעיתו כמה הוא מערך הממון תוכל להוציא [0]שאלה
זו[28]) על שני דרכים האחד[29]) שהתשיעית פחותה משאר השברים[30])
האחרים הנה נחשוב כי הם ג׳ תשיעיות והיתרון[31]) שיש בין החמישית
והתשיעית ד׳ והיתרון שיש בין[32]) החמישית[33]) והשביעית ב׳[34]) נכפול ב׳
על ד׳ יעלו ח׳ נעשה מן הז׳ תשיעית[35]) אחת[36]) יהיו ד׳ תשיעיות שלמות
ונשאר אחד והיתרון בין השביעית והתשיעית ב׳ והנה הממון הוא ד׳

---

[1]) H: ושבעה. [2]) H noch: והנה. [3]) H: ועלו. [4]) H: ושני׳׳ [Rand: וששׁ׳׳]. [5]) Von ועל bis הנשברים fehlt in H. [6]) H: חבורים. [7]) H noch: הם. [8]) H: ונקח. [9]) H: f; in B übergeschrieben. [10]) In H übergeschrieben. [11]) H noch: כמה היה הממון בתחלה. [12]) H: והנה הוספנום. [13]) H noch: כן. [14]) H: נשוב und noch ונכפול. [15]) H: על הצ׳. [16]) Von ד׳ bis יהיו (folg. Z.) fehlt in H. [17]) H noch: החשבון. [18]) H noch: הם. [19]) H: הנשאר. [20]) H: הם. [21]) H: שלמים ד׳. [22]) H: ויהיו. [23]) H: f. [24]) H: והוא. [25]) Hier folgt in M der erste Zusatz mit der Chiffre אמ״ש (= אמר משה שואבי); s. Einleitung. [26]) H: חברנו. [27]) H: ושביעיתו. [28]) H: זו השאלה. [29] H: האחת. [30]) H: שברים. [31]) Von והיתרון bis ד׳ fehlt in H. [32]) H: מן. [33]) H noch am Rande: והתשיעית ד׳ ובין החמש׳ והשביעית. S. Anm. 91 zur Übersetzung. [34]) H noch: והנה. [35]) H: תשיעיות. [36]) H: אחד.

תשיעיות וג׳ חלקים שהם ג׳ חמישיות שביעית תשיעית והדרך[1]) האחרת שנבקש מורה שנכפול ה׳ על ז׳ יהיו ל״ה גם נכפול זה על ט׳ יעלו[2]) שט״ו והוא המורה ואח״כ נחבר חמישית זה המורה[3]) ושביעיתו[4]) ותשיעיתו[5]) יהיו קמ״ג [0]נחלקם על ל״ה[6]) והגה[7]) הם ד׳ תשיעיות ונשארו ג׳ חלקים מל״ה כי ל״ה הוא התשיעית[8]) וה׳ הוא[6]) שביעית התשיעית ולכן[9]) ג׳ חלקים הם ג׳ חמישיות שביעית התשיעית. **שאלה אחרת** ממון הוספנו עליו מחציתו ושלישיתו וחמישיתו וששיתו ובין הכל היו[10]) מ׳ כמה היה הממון ידענו כי החצי והשלישית והששית הוא אחד שלם ונחשוב כי היה לו אחד והגה שנים ויש לנו תוספת החמישית הנה יש לנו לחלק מ׳ על ב׳ [0]וחמישית והעולה[11]) הוא הממון והגה נקח לכל אחד מהשלמים[12]) ה׳ ונשים עמהם א׳ שהוא החמישית יהיו י״א גם נכפול מ׳[13]) על ה׳ עד שיהיו[14]) דרך אחד יהיו ר׳ נחלקם[15]) על י״א יעלו י״ח שלמים ועוד ב׳ חלקים מי״א[16]) נבחן זה[16]) נקח חציו שהוא[10]) ט׳ שלמים וחלק אחד מי״א והגה יהיה לנו כ״ז שלמים וג׳ חלקים מי״א והשלישית ו׳ שלמים וב׳ שלישיות אחד והגה[17]) יהיו[18]) לנו[10]) ל״ג[19]) וג׳ חלקים וב׳ שלישיות[20]) [0]והחמישית מט״ו נקח[21]) ג׳ שלמים[16]) היו לנו[10]) ל״ו שלמים ונשאר[22]) לנו[10]) לקחת חמישית ג׳ שלמים והנה[10]) נקח לכל אחד י״א ונחבר אליהם הב׳ חלקים היתרים יהיו ל״ה וחמישיתם ז׳ נחבר אליהם הג׳ חלקים שהיו לנו וב׳ שלישיות[23]) ונקח ששית י״ח יהיו[24]) ג׳ שלמים נחברם אל ל״ו[19]) יהיו ל״ט שלמים[10]) ושתי ששיות (שנים)[25]) הם [0]שליש אחד[26]) נחברנו אל י׳ חלקים וב׳[27]) שלישיות חלק [0]שהיו לנו[28]) יהיו י״א חלקים[29]) והוא אחד שלם והכל מ׳. **שאלה**[30]) אדם עבר על אנשים אמר להם שלום עליכם מאה איש ענו לו אין אנחנו[31]) מאה רק אנחנו ואחרים כמונו ומחציתנו ורביעיתנו ועמך נהיה מאה והגה נקח למספרם[32]) אחד ואחד[33]) כמוהו הגה שנים וחצינו חצי אחד הגה שנים וחצי נוסיף רביעיתנו הגה יהיו שנים וג׳[34]) רביעית ובעבור[35]) שיש לנו רביעיות[36]) נקח לכל אחד שלם ד׳ יהיו[37]) ח׳ ונחבר[38]) אליהם הג׳

---

1) H: הדרך. 2) H: יהיו. 3) H noch: שהוא ס״ג. 4) H noch: שהוא מ״ה. 5) H noch: שהוא ל״ה. 6) H: f. 7) H noch: ק״ם. 8) H: תשיעיתו. 9) H: אם כן. 10) H: f. 11) H: וחמישיתו העולה. 12) H: מן השלמים. 13) B: הא׳. 14) H: שיהיה. 15) H: נחלקנו. 16) H noch: והנה. 17) H: הנה. 18) H: עלה. 19) H noch: שלמים. 20) H noch: אחד. 21) H: עתה יש לנו ליקח חמישית מ״ח ולא נוכל אלא נקח חמישית מט״ו. 22) H: ונשארו. 23) H noch: יהיו עשרה חלקים וב׳ שלישיות. 24) H: והם. 25) Muss wohl gestrichen werden. 26) H: שלישית אחת. 27) H: ושתי. 28) In H steht שהיו לנו vor וב׳ (resp. ושתי s. vor. Anm.). 29) H: שלמים. 30) H: noch אחרת. 31) H: אנו. 32) H: למספרים. 33) H: אחד. 34) H: ג׳. 35) H: והנה בעבור. 36) H: רביעית. 37) H: ויהיו. 38) H: נחבר.

רביעים[1]) יהיו י״א ובעבור שאמרו כי עמו יהיו מאה יהיה[2]) מספרם עם התוספת[3]) תצ״ט נשיבם[4]) מדרך הד׳ יהיו שצ״ו נחלקם על י״א יהיו ל״ו וככה[5]) מספרם. שאלה אדם קנה בק׳ זהובים ק׳ ליט׳ ואח״כ מכר הנ׳ ליט׳ ליט׳ ורביע[6]) בזהוב והנ׳ האחרים מכר[7]) ליט׳ פחות רביע בזהוב נבקש לדעת אם הרויח או הפסיד[8]) נשיב הנ׳ ראשונים[9]) ר׳ כי רביעיים[10]) הם נחלקם על ה׳ כי ליט׳ ורבי׳ ליט׳ מכר בזהוב ויהיו מ׳ זהובים גם נכפול הנ׳ האחרי׳ על ד׳[11]) יהיו ר׳ נחלקם על ג׳ כי ג׳ רביעיי׳[12]) מכר בזהוב והנה יהיו ס״ו זהובים ושתי שלישיות[13]) זהוב נחבר אליהם המ׳ יהיה הריוח ו׳ זהובים[14]) ושתי שלישיות. שאלה אחרת אדם קנה נ׳ חמישיות ליט׳ בפשוט ומכר[15]) ד׳ שביעיות ליט׳ בפשוט והרויח[16]) פשוט כמה היה ממונו בקש המורה והוא ל״ה שהוא כפל ה׳ על ז׳ והנה נ׳ חמישיותיו כ״א וד׳ שביעיותיו כ׳ והממון[17]) היה כ׳[18]) והליט׳[19]) י״ב. שאלה אדם קנה ד׳ שביעיות ליט׳ בפשוט ומכר אותם ה׳ תשיעיות ליט׳ בפשוט והרויח[16]) פשוט כמה היה[14]) הממון ידוע כי ד׳ שביעיות אחד יותר מה׳ תשיעיות אחד[14]) והנה המורה ס״ג וה׳ תשיעיותיו ל״ה וד׳ שביעיותיו ל״ו ותוכל לבחון זה כי[14]) אחר שקנה ד׳ שביעיות ליט׳ בפשוט וממונו ל״ה הנה יש לו כ׳ ליט׳ עשה מהם תשיעיות יהיו ק״פ חלק זה המספר על ה׳ כי ה׳ תשיעיות מכר בפשוט יעלה[20]) בידך ל״ו ואלו אמר[21]) כי הרויח[16]) ב׳ פשוטים[22]) כפלם[23]) על[14]) ל״ה יהיו ע׳ ואם אמר[24]) נ׳ פשוטים יכפול[25]) על[14]) ל״ה נ׳ פעמים וככה עד[26]) סוף החשבון. שאלה אדם קנה ט׳ חלקים מי״ז חלקי ליט׳ בפשוט ומכרם[27]) י׳ חלקים מי״ט חלקי ליט׳[28]) בפשוט והרויח[29]) פשוט כמה היה הממון בקש המורה והוא שכ״ג וידוע[30]) כי ט׳ חלקים מי״ז הם קע״א וי׳ חלקים מי״ט הם ק״ע וכך היה הממון והליט׳ צ׳. וזה דבר המגרעת קל הוא כי תשים מורה אחד לבי׳ שברים[31]) והמורה תשימנו[32]) אחד שלם. דמיון[33]) רצינו לגרוע ד׳ תשיעיות מה׳ שביעיות המורה ס״ג וה׳ שביעיותיו מ״ה וד׳ תשיעיותיו כ״ח חסרנו כ״ח ממ״ה ישארו י״ז.

45	63
28	$^5/_7$ $^4/_9$
17	

---

1) H: רביעיות. 2) H: הנה. 3) H noch: יהיו. 4) H: נשיב אותם. 5) H: וכך. 6) H noch: ליטרא. 7) H: מכרם. 8) H noch: והנה. 9) H: הראשונים. 10) H: רביעי׳. 11) H noch: אם (?). 12) H: רביעיות. 13) H: שלישי. 14) H: f. 15) H noch: אותם. 16) H: והריוח. 17) H noch: היה כך. 18) H: עשרים. 19) H: והליטר(א)ים (א gestrichen). 20) H: יעלו. 21) H: אומר כן. 22) H noch: היה. 23) H: כופל (soll wohl כפול heissen). 24) H: הם. 25) H: כפול. 26) H noch: אין, ist aber gestrichen. 27) H: ומכר אותם. 28) H: בליט׳. 29) H: והריוח. 30) H: וידענו. 31) H: השברים. 32) H: תשים אותו. 33) Von דמיון bis י״ז fehlt in H.

עתה נשוב לדבר על דרך חכמת[1]) המזלות ושים[2]) לבך להבין דרכיהם[3]) כי תלמי וחביריו °לא מצאו[4]) דרך[5]) שרשי המרובעים אלא על פיהם[6]) ודע כי כל עגול ומה שאיננו עגול יכול[7]) האדם[8]) לחלקו על כמה חלקים שירצה כפי חפצו[9]) וצרכו[10]) והנה חכמי החשבון לא מצאו חשבון קטן שיש לו חלקים רבים שהם אחדים שלמים רק י״ב כי יש לו חצי ושלישית ורביעית וששית וחצי ששית והיה[11]) כן בעבור שאין חשבון פחות ממנו שיהיו[12]) חלקיו רבים ממנו רק הוא לבדו כי חלקיו יוסיפו עליו שלישית[13]) וק״כ דומה לו בעשרות על כן חלקיו כפל המספר בלי תוספת ומגרעת ע״כ חלקו חכמי המזלות הגלגל לי״ב וקראו כל מזל בשם צורת[14]) הכוכבים[15]) העליונים שהם קרובים לקו[16]) גלגל המזלות ועוד כי מצאו בשנת השמש שתתחדש הלבנה י״ב פעמים וחלקו הגלגל על ש״ס מעלות שזה המספר קרוב למספר[17]) ימי[18]) שנת החמה ואין מספר פחות ממנו שכל החלקים שיבטא אדם בהם יש לו חוץ מהשביעית[19]) ע״כ כשיכפול זה החשבון על ז׳ יעלה אלפים וה׳ מאות וכ׳ וזהו המספר[20]) שיש לו כל החלקים ופעמים רבות שיצטרכו בעלי החשבון אליו כאומר חשבון חברנו אליו כל החלקים מחצי עד עשירית מה ערך המספר אליו כי יחשוב[21]) זה החשבון הכולל כי הוא אחד שלם וכאשר חלקנו הגלגל °על י״ב[22]) עלה לכל מזל ל׳ מעלות ואין מספר פחות ממנו שיש לו חלקים רבים כמוהו[18]) כי יש לו חצי °שלישית חמישית ששית[23]) ועשירית ובעבור שאין לו רביעית כפלו זה החשבון והיה[24]) ס׳ על כן חלקו כל מעלה ממנו שהיא[25]) כמו אחד על ששים חלקים וקראו אותם חלקים ראשונים וחלקו כל ראשון לששים וקראום[26]) שניים גם ככה עשו על כל שני[27]) °על ששים[28]) והעולה יקראו שלישיים וככה יעשו[29]) עד עשרה כל אחד לששים ויותר אם יצטרכו. ועתה יש לדבר איך יכפלו זה°[30]) על זה[30]) ולעולם חשוב כי המעלות הם כמו אחדים שלמים והנה אם כפלת מעלות על מעלות יהיה הנכפל מעלות וכפל מעלות על ראשונים ראשונים ועל[31]) שניים שניים והכלל כפל מעלות על איזה מין שיהיה יעמוד אותו המין בעצמו וכפל ראשונים על ראשונים יהיה העולה שניים וראשונים על שניים יהיה העולה שלישיים ועל[32]) זה הדרך כל המינין[33]) וכפל שניים על שניים יהיה הנכפל רביעיים

---

1) H: חכמי. 2) H: שים. 3) H: דבריהם. 4) H: אינם מוצאים. 5) H: דרכי. 6) B am Rande: ס״א על דרך חכמי המזלות, H u. M wie die ס״א. 7) H: יוכל. 8) H: f. 9) H: החשבון. 10) H: או כפי צרכו. 11) H: והנה עשו. 12) H: שהם [Rand: נ״ל שיהיו]. 13) H: שלישיתו. 14) H: צורות. 15) B: הככבים. 16) H: אל קו. 17) H: במספר. 18) H: f. 19) H: משביעית. 20) H: מספר. 21) H: יחשב. 22) H: לי״ב. 23) H: ושלישית וחמישית וששית. 24) H: והוא. 25) H: שהוא. 26) H: וקראו אותם. 27) H noch: חלקוהו. 28) H: לששים. 29) H: עשו. 30) H: אלה. 31) H: ומעלות על. 32) H: על. 33) H: המנין.

ועל שלישיים חמישיים וכפל[1]) שלישיים על שלישיים ששיים עד שיהיה כפל[2]) שלישיים על רביעיים שביעיים וחמישיים[2]) על[3]) המישיים[4]) [0] או שלישיים[2]) על[3]) שביעיים עשיריים. והנה אתן לך שנים[5]) דרכים נכונים הדרך האחד במכתב שתשים המעלות כמעלה הראשונה[6]) והראשונים במעלה השנית[7]) וככה כל השברים זה אחר זה וזה המכתב בהפך[8]) מה[9]) שאנו עושים בכפל השלמים כי החשבון המעט הוא בראשונה ואם אין לך מעלות כתוב גלגל בראשונה[10]) ואם אין[11]) לך ראשונים כתוב גלגל במקומו וככה תעשה במקום כל שבר אם יש שבר אחריו פחות ממנו ובזה הדרך תוכל לדעת באיזו[12]) מעלה [0] מן השברים[13]) יעמד[14]) איזה שבר שתרצה ועשה כדרך השלמי׳ רק יש לך להשמר שתשים קו באורך בין מיני השברים כלם ואם היו ב׳[15]) חשבונים באיזה מין שיהיה מן השברים כגון[16]) כ״ב [0] יש לך לעשות[17]) כשתכתבם[18]) שים אותם ברוחב שבין שני הקוים במעלתם[19]) על הדרך שאתה עושה בשלמים כזה[20])

מעלות	ראשונים	שניים	שלישיים	רביעיים	חמישיים	ששיים
ב	ט	ד	ג			
ג	חא	דד	אא			
ו	וג	חח	בב			
	זב	בוא	וטג	טט		
		בא	בז	וזא	דד	
			ט	דה	בנא	נג
ז	ז	טג	דב	אג	וה	נג

מעלות	ראשונים	שניים	שלישיים	רביעיים	חמישיים	ששיים
ב ג	ט חא	ד דד	ג אא			
ו	וא זב ב	חח בז בט א	בב ג וג בו טג ד	טטא וא דו ב ג	דדא בא ב	גג
ו א	ג ו ד	בוב ת	טטד ה	טבג ב	וזא	גג
היוצא מהכפל אחר שהשיבונו חמישיים לרביעיים ורביעיים לשלישייב ושלישיי׳ לשניים ושניי׳ לראשונים וראשונים למעלות						
ז	ז	0ג	דב	אג	וה	גג

[1]) H: וכפל. [2]) H: f. [3]) H: ועל. [4]) H noch: שמיניים. [5]) H: שני. [6]) H: ראשונה. [7]) H: שנית. [8]) H: הפך. [9]) H: ממה. [10]) Von בראשונה bis גלגל (Z. 10) fehlt in H. [11]) B: f. [12]) H: באיזה. [13]) H: מהשברים. [14]) H: עומד. [15]) H: שנים. [16]) H: כמו. [17]) H: f. [18]) H: כשתכתוב אותם. [19]) B: במעלתה. [20]) H u. M: f. In M stehen schon hier die Worte והדרך השנית (folg. S. Z. 7) bis מעלות השברים (Z. 8.). In H steht hier am Rande folgende Bemerkung: עיין בראש הספר תמצא הצורה הזו, die Figur findet sich aber dort nicht. M hat die nebenstehende Figur.

הנה כבר שמנו קוים בין השברים והגענום עד שלישיים ככה הטורים העליונים וככה השפלים וכאשר כפלנו הטורים העליונים על השפלים עלה מספרם המספר הכתוב למטה חלקנו כל מעלה על ששים וחברנו העולה על ההוה במעלה הראשונה[1]) והנשאר כתבנו[2]) לבדד וככה[3]) עשינו מכל מעלה ומעלה עד שהגענו למעלות שהם כמו השלמים והנה נשארו מן הששיים נ׳ ג׳[4]) ומן החמישיים ו׳ ה׳ ומהרביעיים א׳ ג׳ ומהשלישיים ד׳ ב׳ ומהשניים 0 נ׳ ומהראשונים ז׳ ומהמעלות גם כן ז׳. והדרך[5]) השנית במבטא שתחבר השנים השברים ובמחברתם מעלות השברים[6]) וכאשר עשינו על דרך חכמי החשבון שהשיבונו הטורים[7]) העליונים אל שלישיים[8]) עלה החשבון כך[9]) [0]נ׳ ד׳ ו׳ ד׳ ו׳ ד׳[10]) ככה[11]) עשינו בשפלים [0]עלה החשבון כך[9]) [0]א׳ ה׳ ד׳ ה׳ א׳ ז׳[12]) והנה כפלנו זה על זה ועלה[13]) [0]המספר כזה[9]) [0]ג׳ט׳ ט׳ח׳ ט׳ב׳ ד׳ב׳ נ׳ג׳[14]) והם י״ב טורים [0]והנה כל אלה ששיים[9]) חלקנום על ס׳[15]) ועלו חמישיים[16]) [0]כזה ו׳ א׳ ג׳ ח׳ח׳ ד׳0 ד׳ה׳ה׳[17]) ונשארו ל״ה[18]) ששיים במספר[19]) הראשון וככה עשינו על זה הסדר[20]) והיה המספר שעלה באחרונה גם הנשאר מכל מעלה[21]) ומעלה[9]) כמספר הדרך הראשונה[22]). והוצרכתי להראות דרך אלה החלקים שהם הראשוני[23]) עד שלישיים כי על זה הדרך הוציא תלמי המלך יתרי הקשתות עד שהגיעם אל חמישיים והם בכפל[24]) עשיריים[25]) וכל זה עשה להוציא שרשי המרובעים שאין להם שורש נכון באמת רק יוציאוהו[26]) קרוב אל האמת כי לא ישארו בחלוק הכפל[27]) ראשונים ולא שניים ואפילו שלישיים כאשר אפרש בשער השביעי[28]) ודע כי יש בכל[29]) חכמה דברים נעלמו מעיני כל החכמים הקדמונים וגם מכל הבאים אחריהם כמו[30]) שרשי המספרים שאינם

---

1) H: ראשונה. 2) H: übergeschrieben במבטא. 3) H: ככה. 4) Das Stück von ג׳ג׳ bis גם כן ז׳ (Z. 7) lautet in H so: ג׳ג׳ וכן(!) מחמשיים ומהרביעיים ומהשלישיים א׳ה׳ ומהשביעיים(!) [übergeschrieben: ומהראשונים ז׳] גם כן המעלות. Dazu am Rande: הגהת רג׳ ומן החמישיים ו׳ד׳. Unten am Rande so: מהששיים ל״ג ומהחמ׳ מ׳ו(?) ה׳ב׳(?) ו׳ה׳ ומהרביעיים א׳ב׳ ומהשלישי׳ ד׳ב׳ ומהשניים 0ג. 5) M: s. vor. S. Anm. 20. 6) B am Rande: צ״ע. 7) B am Rande: צ״ע. 8) H: ששים. 9) H: f. 10) H: übergeschrieben, und zwar so: ג׳ד׳ו׳ ד׳ו׳ד׳. 11) H: וככה. 12) H: übergeschrieben, und zwar so: א׳ה׳ד׳ ה׳א׳ד׳. 13) H: ועלו ג׳(!). 14) H: am Rande; im Texte noch חלקנו כל זה. 15) H noch: חלקים. 16) H: חמישים. 17) H: am Rande. 18) H: ל״ג. 19) H: כמספר. 20) H: כסדר. 21) B: ממעלה. 22) M hat hier noch eine Erklärung zu den letzten Worten des Verf., beginnend mit פי׳ und schliessend mit ע״כ תוספת. 23) H: ראשונים. 24) H: בכלל. 25) H: עשירים. 26) B am Rande: יוציאנו. 27) B am Rande: הכפול. 28) H noch: בע״ה. 29) H: לכל. 30) B: כי.

מרובעים בחכמת החשבון וככה בחכמת המדות לדעת הקו הסובב מאלכסון ידוע ולא יכול אַרִישמדם[1]) החכם לקרבו[2]) אל האמת רק שנתן ראיות מחכמת המדות כי הקו הסובב ראוי להיותו שלשה[3]) מהאלכסון[4]) ותוספת י' חלקים מע' במעלה אחת והביא ראיות שיפחתו[5]) מחלק אחד [0] מאלו החלקים[6]) שניים ולא[7]) ידע כמה הם רק הביא ראיה כי התוספת ראויה להיות יותר מי' חלקים מע' חלקים וחצי חלק ותלמי המלך תפס הדרך[8]) האמצעית על כן אמר כי התוספת היא[9]) ח' חלקים מס"ג[10]) גם ל' שניים ובסוף השער השביעי נדבר על זה וככה בחכמת התולדת מצאו חכמים בדרך נסיון[11]) בעשבים ובאבנים ובבתי[12]) אברי הגוף האדם והם אמת ואין אחד מהם יודע למה היה[13]) ככה רק השם ית'[14]) הנשגב לבדו.

1) H: ארשמידס; M: ארסימידש. 2) H: לקרב אותו. 3) H: שליש. 4) H: מן האלכסון. 5) H: שיפחת. 6) B: מחלקי אלה. 7) H: לא. 8) H: f. 9) H: הוא. 10) H: מששים. 11) M noch: סגולות. 12) H: ובכח. 13) H: הוא. 14) H: f; M: הנכבד.

השער הו׳

[0]הוא שער הערך[1])

מיני הערכי׳ על ג׳ דרכים האחד[2]) ערכי החשבון והם על הסדר כמו א׳ ב׳ ג׳ כי לא יתכן להיות הערך פחות מג׳ מספרים או ב׳ ד׳ ו או ג׳ ו׳ ט׳ והטעם כי הערך בכלם שוה פי׳[3]) כי כיתרון ד׳ על ב׳ כן יתרון ו׳ על ד׳ והערך[4]) השני[5]) ערכי המדות כמו ד׳ ו׳ ט׳ כי ערך ד׳ אל ו׳ [0]כמו ערך[6]) ו׳ אל ט׳[7]) כן כפל הקטן אל הגדול ככפל התיכון על עצמו שהוא מרובעו ודע כי אלה הג׳ מספרים הם[1]) כמו ד׳ כי האמצעי [0]יחשב כאלו הוא מספר אחר[8]) על כן כל ד׳ מספרי׳ שערך הראשון אל השני כערך השלישי אל הרביעי אם תחבר מרובעי ארבעתן ותדע כמה יעלה ותחבר הראשון עם הרביעי ותקח מרובע המחובר ותוסיף עליו מרובע היתרון שיש בין השני ובין השלישי יהיה שוה בעולה[9]) בראשונה וככה אם תחבר השני והשלישי ותקח מרובע המחובר ותוסיף עליו מרובע היתרון שיש בין הראשון ובין הרביעי [0]ימצא העולה שוה לראשון[1]). דמיון ערך ד׳ על ו׳ כערך ח׳ אל י״ב והנה מרובעיהם ר״ס והמחובר מן הראשון והרביעי י״ו ומרובעו רנ״ו והיתרון בין ו׳ וח׳[10]) הוא[1]) ב׳ ומרובעו ד׳ והנה המספר שוה וככה המחובר מן השני והשלישי י״ד ומרובעו קצ״ו והיתרון בין הראשון והרביעי ח׳ ומרובעו ס״ד והנה המספר שוה. ודע כי רוב חכמת[11]) המזלות ותקוני מקום המשרתים תלויים בחכמת ערכי המדות וככה רובי דיני[12]) השאלות בחשבון. והדרך השלישי[13]) ערכי חכמת הנגינות והיא הכמה מפוארת מאד כי ערכיה מורכבים מערכי החשבון וערכי[14]) המדות כי לעולם יהיה[12]) הערך שבין[15]) הראשון לתיכון אל ערך שיהיה[16]) בין התיכון לאחרון[17]) כערך המספר הראשון למספר[18]) האחרון[19]) דמיון ב׳ ג׳ ו׳ ידענו כי הערך שבין[20]) ב׳ וג׳[21]) אחד והערך שבין[15]) ג׳ ובין[22]) ו׳ שלשה וככה ערך ב׳ אל ו׳. דמיון אחר ג׳ ד׳ ו׳ או אם תרצה כ׳ ל׳ ס׳[23]) והנה הערך שבין[15]) ג׳ וד׳[24]) אחד והערך שבין[15]) ד׳ וו׳[25])

---

1) H: f. 2) H: הדרך האחת. 3) Von פי bis על ד׳ fehlt in H. 4) H: והדרך. 5) H: השנית. 6) H: כערך. 7) H noch: ועל. 8) B am Rande: ס״א מתהפך לשנים. 9) H: כמי שעולה. 10) H: ובין ח׳. 11) H: חכמות. 12) H: f. 13) H: השלישית. 14) H: ומערכי. 15) H: שיש בין. 16) H: שיש. 17) H: ובין האחרון. 18) H: אל המספר. 19) B noch: וכן יהיה לעולם היתרון שבין הראשון לתיכון עם היתרון שבין התיכון לאחרון כיתרון האחרון אל הראשון (s. Anm. 110 zur Übersetzung). 20) H: שיש בין. 21) H: ובין ג׳. 22) B: אל. 23) In H ist ס׳ in מ׳ geändert, hierzu am Rande die Bemerkung: יושר שלי. 24) H: ובין ד׳. 25) H: ובין ו׳.

שנים והנה הוא כפלו וככה ו׳ אל[1]) ג׳ והנה [0]אם ידעת[2]) השנים מספריי תוכל להוציא השלישי כי אם ידעת הראשון והשני ולא תדע השלישי בכפול הראשון על השני והעולה חלקנו[3]) על הראשון אחר שתגרע ממנו [0] פיי מהראשון[4]) היתרון שיש בינו ובין השני דמיון הראשון[4]) כפלנו ב׳ על ג׳ וחלקנו[5]) העולה על הראשון אחר שנרענו[6]) ממנו היתרון שבין[7]) הראשון והשני[8]) והוא אחד והנה היו ו׳ והוא השלישי ובדמיון השני כפל[9]) ג׳ על ד׳ היו י״ב והיתרון בין ג׳ וד׳[10]) אחד גרענוהו[11]) מנ׳[12]) שהוא הראשון[13]) ונשארו ב׳[14]) חלקנו עליו י״ב והם ו׳ לכל אחד והוא השלישי ונאמ׳ כי אם[4]) ידענו השני והשלישי ולא ידענו הראשון נכפול אלה הידועי׳ שהם השני והשלישי ונחלק העולה על המחובר מהמספר השלישי עם היתרון שיש בין השני והשלישי והעולה הוא הראשון והנה בדמיון הראשון כפלנו ג׳ על ו׳ והעולה י״ח והיתרון שבין[7]) השני והשלישי[15]) שלשה חברנום אל ו׳ והיו ט׳ חלקנו י״ח עליו עלו ב׳ והוא הראשון ובדמיון השני כפלנו ד׳ על ו׳ והיו[16]) כ״ד חלקנום על ח׳ שהוא במספר[17]) החשבון השלישי עם היתרון שיש בין השני והשלישי עלו ג׳ והוא הראשון ואם לא ידענו האמצעי ונבקש[18]) לדעתו נכפול הראשון על השלישי ונחלק העולה על המחובר [0] מן השנים[19]) מספרים[20]) והעולה בחלוק נכפלנו והוא המספר[21]) האמצעי[22]) דמיון[23]) הראשון כפלנו ב׳ על ו׳ עלו י״ב חלקנו[24]) על ח׳ שהוא המחובר משניהם עלה[25]) א׳ וחצי כפלנוהו עלו[26]) ג׳ וככה הוא השני ובדמיון האחר[27]) כפלנו ג׳ על ו׳ עלו י״ח חלקנו[24]) על ט׳ שהוא המחובר משניהם עלו ב׳ כפלנוהו ועלה ד׳ והוא המספר השני המבוקש וככה בערכי המדות אם לא ידענו האחד[28]) מן הד׳ נוכל להוציאו מן הג׳ ולעולם נשים שתי[29]) הקצוות שהם הראשון והרביעי חברים והשנים האמצעיי׳ שהם[30]) השני והשלישי חברים והנה אם לא ידענו אחד מן הקצוות א׳זה מהם[31]) שיהיה נכפול האמצעי על חבירו והעולה נחלקנו על אחד מהקצוות[32]) שהוא נודע והעולה הוא המבוקש ואם לא ידענו אחד מהמצעיים[33]) נכפול אחד מהקצוות[34]) על חברו ונחלק העולה על האמצעי הנודע אז ימצא המבוקש ועל זה הדרך תעשה בכל השאלות ויש לך להשמר באיזה מקום תשים הגלגל[35]) ועתה אכתוב

---

1) H: כפל. 2) B: ידעת אם. 3) H: חלקהו. 4) H: f. 5) H noch: אותו. 6) B: שחלקנו, am Rande שגרענו. 7) H: שיש בין. 8) H: ובין השני. 9) H: כפלנו. 10) H: ובין ד׳ 11) H: גרעהו. 12) H: מן הג׳. 13) H: הקטן. 14) H: ב״(י) [י gestrichen]. Auf diese Streichung des י bezieht sich die Randbemerkung: יושר שלי. 15) H noch: הם. 16) H. היו. 17) H: כמספר. 18) H: נבקש. 19) H: מב׳ 20) H: המספרים, 21) B: מספר. 22) H: השני. 23) H: הנה ברמיון. 24) H: חלקנום. 25) H: עלו. 26) H: והיה. 27) H: אחר. 28) H: אחר. 29) H: שני. 30) H: f. 31) H: מהן. 32) H: הקצוות. 33) H: מן האמצעיים. 34) H: מן הקצוות. 35) H: גלגל.

לך שאלות רבות כדי[1]) להרגילך[2]) **שאלה** ממון חברנו חמישיתו וששיתו ושביעיתו והיו עשרה כמה הממון בקשנו המורה שכפלנו ה׳ על ו׳ עלו[3]) ל׳ גם זה על ז׳ והיו[3]) ר״י והוא המורה וחמישיתו מ״ב וששיתו ל״ה ושביעיתו ל׳ והנה שלשתם ק״ז הנה[4]) ערך הממון שהוא עשרה המחובר מהם אל כל הממון שאינו נודע כערך ק״ז אל ר״י [0]פי׳ שהוא המורה[1])

ונעשה הדמיון כך[5]) כפלנו הקצוות שהם י׳ [0]על ר״י[6]) והיו אלפי׳ וק׳ ואלו[7]) היינו עושים להפך היה הדבר שוה כזה חלקנום[8]) על האמצעי שהוא ק״ז עלו[9]) י״ט שלמים ונשארו ס״ז חלקי׳ מן ק״ז והוא כל הממון. ונבחן זה כי ג׳ שלמים חמישית ט״ו ונשארו ד׳ שלמי׳ שלא לקחנו

0 א 0
ב א 0   א 0 ז
ב א 0   א 0 ז
0 א 0

חמישיתם נעשה [0]מן כל[10]) אחד ק״ז ונחבר אל המחובר ס״ז יהיה הכל תצ״ה וחמישיתם צ״ט וששית י״ח ג׳ ונקח לא׳ הנשאר ק״ז נחבר אליו ס״ז יהיו קע״ד וששיתו כ״ט גם השביעית שנים שלמי׳ נשארו ה׳ שאין להם שביעית נקח לכל אחד ק״ז יהיו תקל״ה נחבר אליהם[11]) ס״ז יהיו תר״ב ושביעיתם פ״ו נחבר החלקים יהיו שנים שלמים נחברם אל השלמים והיו[12]) י׳. **דמיון** אחר לקחנו שביעיתו ותשיעיתו והיו ז׳ המורה ס״ג והשביעית והתשיעית י״ז וככה[13]) הצורה הנה[14]) החשבון כ״ז [0]שלמים וט׳ חלקי׳ מי״ז[14]) ואם הפך הדבר ואמר[15]) חסרנו מהממון שביעיתו ותשיעיתו נשארו[16]) ז׳ גם אנו נעשה[17]) המורה להפך[14]) כי המורה הוא אחד רק נחסר י״ז שהוא השביעית והתשיעית מהמורה ונשארו מ״ז ונכתבהו[18]) ככה

ז ג   ו א
0   ז

כפלנו ז׳ על ס״ג והיו תמ״א חלקנו על מ״ז עלו ט׳ ו״ח חלקי׳ ממ״ז [0]ועתה הוא[14]) ושביעיתם כדרך שהראיתיך עלה אחד שלם גם י״ז חלקי׳ לקחנו תשיעיתו והוא אחד שלם וב׳ חלקי׳ ונשארו ז׳ שלמים.

ז ג   ד ז
0   ז

שאלה ד׳ אנשים יש לאחד מהם[14]) י״א דינ׳ ולשני י״ג דינ׳[14]) ולשלישי ט״ז דינ׳[14]) ולרביעי י״ז דינ׳[14]) והרויחו י״ט דינ׳ כמה יקח כל אחד לאחד[14]) נבחר ראשי כל ממונם והיו[19]) נ״ז[20]) וכערך[21]) כל אחד אל נ״ז ככה יקח מי״ט ונעשה[22]) כך נכפול[23]) י״א על י״ט יעלו[24]) ר״ט נחלק על נ״ז עלו ג׳ שלמי׳ ונשארו מ״א חלקי׳ עשינו כן בי״ג עלו רמ״ז חלקנום על נ״ו

ה ו   א א
א ט   0
ה ו   א ג
א ט   0

---

[1]) H: f. [2]) B hat hier einen Zusatz, der am Anfang und am Ende mit ת׳ bezeichnet ist. [3]) H: יהיו. [4]) H: והנה. [5]) H: ככה. [6]) H: ור״י. [7]) Von ואלו bis כזה fehlt in H. [8]) H: חלקנו. [9]) H: עלה. [10]) H: מכל. [11]) H: אליו. [12]) H: יהיו. [13]) H: והנה ככה. [14]) H: f. [15]) H: אמר. [16]) H: ונשאר לנו. [17]) H: נהפוך. [18]) H: ונכתוב אותו. [19]) H: והוא. [20]) H noch: דינ׳. [21]) H: וערך. [22]) H: ויעשה. [23]) H: יכפול. [24]) H: ויעלו.

עלו ד' שלמי' וכ"ג חלקי' עשינו כך[1]) בט"ו ועלו[2]) רפ"ה חלקנום על נ"ו עלו[3]) ה' שלמי' וה' חלקי' עשינו כך[1]) בי"ז עלו שכ"נ חלקנום על נ"ו עלו ה' שלמים ומ"ג חלקים חברנו השלמי' ואלה החלקי' ועלו י"ט שלמי' כי אלה החלקי' חלקי נ"ו הם[4]).

הא	ו	ה
0	ט	א

דרך אחרת השיבונו הריוח כלו פשוטים [0]שכפלנו הי"ט דיני' בי"ב[4]) עלו[5]) רכ"ח חלקנום על נ"ו עלו[5]) ד' פשוטי' גם ד' חלקי' מנ"ו כי כל פשוט יתחלק לנ"ו שהם חצי שביעית פשוט לכל דיני' והנה כפלנו י"א על ד' עלו[5]) מ"ד פשוטי' שהם נ' דיני' ח'[6]) פשוטי' ומ"ד חלקי פשוט גם כפלנו י"ג על הד'[7]) והיו נ"ב שהם ד' דיני' וד' פשוטי' ונ"ב חלקי'[8]) גם כפלנו ט"ו על ד' והיו ס' פשוטי' שהם ה' דיני' וס'[9]) חלקי' חברנו פשוט מנ"ו ושארו[10]) ד' חלקים גם כפלנו י"ז על הד'[7]) והיו ס"ח פשו'[4]) שהם ה' דינ' וח' פשו' וס"ח[11]) חלקי' נחבר מהם[4]) פשוט[12]) ישארו[10]) י"ב חלקים[13]) נחבר החלקים כלם יהיו ב' פשו' ונחבר[14]) הפשוטי' יהיו ב' דינ' נחברם אל החלק הגדול יהיו בין הכל[15]) י"ט דיני'.

ז א	ו	ה
0	ט	א

שאלה יש אצל המחליף שלשה מטבעים שוה הזהוב ממטבע האחר[16]) ג' דיני' וממטבע השני[17]) ד' דיני' וממטבע השלישי[18]) ו' דיני' ובא אדם אחד[19]) ובקש[20]) למחליף שיתן לו מג' המטבעי'[21]) בזהוב ויהיה המספר בשוה[22]) מן היקרים כמו משאינם[23]) יקרים בקש חשבון שיש לו שלישית ורביעית וששית והוא י"ב [0]והוא המורה[4]) וכל החלקים הנזכרים הם ט' [0]והוא דינר[4]) ונבקש מה ערך י"ב אל ט' והנה הוא כמוהו ושלישיתו והנה נוסיף על י"ב פשו' שהוא דינר ד' פשו' שהוא שלישיתו ועלו[24]) י"ו פשו' וככה לקח מכל מטבע ולבחון דבר[4]) זה קל[25]) הוא כי הערכי' נמצאים במהרה[26]) והנה נשים המטבע של שלשה[27]) עקר[28]) וידענו כי הי"ו ממטבע ו' הם[29]) ח' פשו' [0]ממטבע ג'[30]) כי ו' כפל ג' והנה בין שניהם כ"ד[31]) וידוע כי ערך ג' אל ד' ג' רביעיות על כן יהיה חילוף י"ו פשו' ממטבע ד' הם י"ב פשו' ממטבע ג' והנו[32]) דינר אחד ונ'[33]) דיני' ממטבע האחד[34]) וככה תוכל להשיב חלוף מה שלקח לאיזה מטבע שתרצה ואין צורך להאריך. דמיון אחר קשה כי אין לו ערכים כי אם בקושי וזהו מחליף יש לו ג'

---

1) H: כן. 2) H: ועלה. 3) H: ועלו. 4) H: f. 5) H: ועלו. 6) H: ותי. 7) H: די. 8) H noch: מפשוט. 9) H: גם יש לנו ס'. 10) H: ונשארו. 11) H: גם יש לנו ס"ח. 12) H noch: מנ"ו. 13) H noch: והנה. 14) H: גם נחבר. 15) H: כלם. 16) H: אחר. 17) H: אחר. 18) H: אחר. 19) H noch: לפניו. 20) H: ויבקש. 21) H: מטבעים. 22) H: שוה. 23) H: שאינם. 24) H: ויעלה. 25) H noch: הנה הדבר. 26) H: במקרה (Schreibfehler? oder = בְּמִקְרֶה?).
27) H: השלשה. 28) H: עיקר. 29) H: והם 30) H: f. 31) H noch: פשוט
32) H: והיו. 33) H: והנה ג'. 34) H: אחר.

מטבעים האחד ה׳ דינ׳ בזהוב והשני ז׳ והשלישי ט׳ והביא זהוב ורצה[1])
לקחת בשוה מספר שוה מכלם[2]) בזהוב אחד עשה[3]) כמשפט וכפול[4]) ה׳
בז׳[5]) והעולה °ל״ה וכפול זה[6]) על ט׳ יהיו[7]) שט״ו והוא המורה וחמישיתו
ס״ג ושביעיתו מ״ה ותשיעיתו ל״ה והנה כשנחבר[8]) אלה שלשתם יהיו קמ״ג
°והוא הדינ׳[6]) נחלק[9]) המורה על זה המספר יהיו[10]) ב׳ דינ׳ וישארו[11])
כ״ט חלקים מן קמ״ג וככה יקח מכל מטבע ולבחון זה קשה הוא כי אם על
הדרך שאומר לך בעבור החלקים והנה נחל לבחון[12]) להשיב המספר הנזכר
ממנו[6]) ממטבע ז׳ וממטבע ט׳ אל מטבע ה׳ וככה נעשה נשיב הדינ׳ חלקי׳
מקמ״ג ונשים עמהן[13]) החלקים שהם[14]) שט״ו והוא המורה ונבקש[15])
להחליף מטבע ז׳ אל[16]) ה׳ ונכפול[17]) שט״ו על ה׳ ויהיו[10]) אלף תקע״ה[18])
נחלקם[19]) על ז׳ יהיו רכ״ה חלקים ממטבע ה׳ גם[20])׳אלף תקע״ה[18]) על ט׳
לדעת כמה יהיו[10]) מהמטבע[21]) השני והנה[22]) קע״ה וכאשר תחבר אלה ג׳
מספרים שהם ממטבע אחד שט״ו גם רכ״ה גם קע״ה והנה הכל תשט״ו
חלקנום על קמ״ג שהוא[23]) הדינ׳[24]) עלו ה׳ דינ׳ שוים או אם תרצה חשוב
ככה כבר היו ממטבע ה׳ ב׳ דינ׳ וכ״ט[25]) חלקים וכאשר החלפנו זה המספר
ממטבע ז׳ יהיו[26]) רכ״ה חלקים שהם דינ׳ אחד ופ״ב[27]) חלקים ואם ממטבע[28])
ט׳ יהיו[26]) קע״ה שהם דינ׳ אחד ול״ב חלקים חברנו כל החלקים יהיו קמ״ג
שהם דינ׳ אחד והנה המספר אחד[29]) ועוד נשיב הכל למטבע ז׳ והנה כבר
היו לנו[30]) שט״ו חלקים שהוא המורה ונרצה[31]) לדעת כמה חלקי׳ יהיו[32])
ממטבע ה׳ והנה נכפול שט״ו על ז׳ יעלו אלפים ור״ה[33]) נחלק[34]) על ה׳
יעלו תמ״א גם[35]) נחלק עוד זה המספר על ט׳ יהיה העולה[36]) רמ״ה נחבר
כל אלה החלקים[37]) ונחלק המחובר[38]) על קמ״ג יהיו ז׳ דינ׳, ועוד נשיב
הכל למטבע ט׳ והנה יש לו °מהמטבע שלו שט״ו חלקים[39]) שהוא המורה
שהם ב׳ דינ׳ גם כ״ט חלקי׳ ונשוב לכפול שט״ו[40]) על ט׳ יהיו אלפים[41])
ותתל״ה נחלק זה המספר על ה׳ יהיו תקס״ז גם °נחלק זה[42]) על ז׳
שהוא המטבע האחד יהיו ת״ה וכאשר נחבר אלה החלקים של

---

1) H: וירצה. 2) H: לכלם. 3) H: יעשה. 4) H: לכפול. 5) H: על ד׳. 6) H: f. 7) H: ויהיה. 8) H: כשתחבר. 9) H: והנה נחלק. 10) H: יהיה. 11) H: ונשאר. 12) H: לזכור. 13) H: עמהם. 14) B am Rande: ס״א והנה היא, H u. M: wie diese ס״א. 15) H: נבקש. 16) H: על. 17) H: והנה נכפול. 18) H: ותקע״ה. 19) H: נחלק. 20) H noch: נחלק. 21) H: ממטבע. 22) H noch: הם. 23) H: והוא. 24) H: ה׳(!) דינ׳ und noch הנה. 25) H: גם כ״ט. 26) H: היו. 27) H: גם פ״ב. 28) H: מטבע. 29) H: שלם. 30) B: לו. 31) H: ותרצה. 32) B am Rande: יקח, H u. M: יקח wie in B am Rande. 33) H: ר״ה. 34) H noch: אותו. 35) H noch: כן. 36) H noch: אז. 37) H noch am Rande ויהיו אלף ואחד׳׳. 38) H: לאלף והאחד. 39) H: שט״ו חלקים ממטבע שלו. 40) H noch: חלקים שהוא המורה. 41) H: אלפיים. 42) H: נחלקהו.

ג׳[1]) מטבעים[2]) יהיו אלף רפ״ז[3]) וכאשר נחלק זה על קמ״ג יהיו ט׳ דינ׳ שלמים וככה תעשה אם היו[4]) מטבעים או יותר עתה[5]) ארצה לבאר לך[6]) באיזה מקום תשים הגלגל[7]) והנה נעשה דמיון. שאלה ראובן שכר שמעון שיעבוד[8]) עמו י״ז ימים[9]) ויתן לו י״א פשו׳ והנה[10]) עבד ט׳ ימים והוא[11]) אין ספק כי בערך[12]) הימים שעבד אל כל הימים שהיה[13]) התנאי שאותו[14]) הערך בעצמו יקח מי״א שהם הפשוטים והנה[15]) נשים[16]) הגלגל הראשון[17]) והשני י״א והשלישי ט׳ והרביעי י״ז ככה[6]) ואם נרצה נשים הגלגל שני 0 ומספר הרביעי ט׳[6]) שנעשה ככה כי כאשר שמנו 0 המספר הגדול בראשונה[18]) של פשוטים ככה 0 נשים במספר[19]) השני המספר הגדול של ימי העבודה[20]) שלישי[21]) ראשון 0 לשנים האחרונים[22]) ונוכל לשום[23]) הגלגל שלישי כזה[24]) ונוכל לשום הגלגל רביעי[25]) ככה והכל[26]) שוה. שאלה ראובן שכר שמעון שיוליך לו 0 על בהמתו[27]) י״ג מדות חטה מהלך י״ז מילין ויהיה[28]) שכרו י״ט פשוטים[29]) והוא הוליך שבע[30]) מדות מהלך י״א מילין כמה שכרו ככה תעשה 0 צריך אתה[31]) לעשות הערכים פעמים כי אין דרך אחרת להוציאם[32]) וחשוב כי הז׳ מדות הוליך אותם כל התנאי שהם י״ז[33]) והנה תעשה[34]) ככה הדמיון[35]) הנה[36]) נכפול[37]) הקצוות שהם ז׳ וי״ט יהיו קל״ג נחלקם[38]) על י״ג יעלו י׳ שלמים ונשארו ג׳ חלקים מי״ג בפשוט אחד ובעבור שלא הוליך אלא[39]) ז׳ מדות רק י״א מילין אנחנו[40]) צריכים לעשות ערך אחר ודמיון אחר ונעשה ככה י״א[41]) י״ז גלגל י׳[42]) גם ג׳ חלקים מי״ג 0 וזה דמיונו[43]) ובעבור שאנו

0 אא
ט זא

0 אא
זא ט

ט זא
0 אא

זא ט
0 אא

ז גא
0 טא

אא זא
0 0א ג

1) H: הג׳. 2) H: מטבעות. 3) H: ורפ״ז. 4) H: יהיו. 5) H: ועתה. 6) H: f. 7) H: גלגל. 8) H: שיעמוד. 9) H: יום. 10) H: והוא. 11) H: והנה. 12) H: בערך. 13) H: שהם. 14) H: אותו. 15) H noch: נעשה כזו הצורה. 16) H: ונשים. 17) H: ראשון. 18) H: בראשונה המספר הגדול. 19) B am Rande: ס״א תשים המספר. 20) H: העבדה. 21) H noch: שהוא. 22) H: למספר השנים. 23) H: לעשות. 24) H: ונעשה ככה 25) H noch: ונעשה. 26) H noch: הוא. 27) H: f. 28) R(odet S. 20): והיה. 29) R: פשטים. 30) R: ד׳. 31) R: אתה צריך. 32) H u. R: להוציאה. 33) H noch: חלק; M noch: מילין. 34) R: f. 35) H: f; R hat Figur 1. 36) H u. R: והנה. 37) H u. R: כפלנו. 38) R: חלקים. 39) H: f; R: כי אם. 40) R: אנו. 41) R: א׳. 42) B. f. 43) H u. R: f; R hat Figur 2.

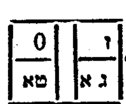


Fig. 1.

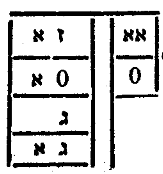


Fig. 2.

צריכן[1]) לכפול הקצוות ולחלק העולה על י״ז ויש לנו ברביעי[2]) ג׳[3]) [0]חלקים מי״ג[2]) צריכין[4]) אנו[2]) לבקש מורה אחד לשניהם [0]וככה נמצאנו[2]) שנכפול[5]) י״ג על י״ז יעלו[6]) רכ״א [0]והוא המורה והוא אחד שלם[2]) והנה ג׳ חלקים מי״ג[7]) יהיו[8]) נ״א מרכ״א ונשוב לכפול[2]) י״א על י׳ יהיו ק״י גם נכפול[9]) י״א שהם שלמים על נ״א שהם חלקים ויעלו תקס״א נחלקם[10]) על רכ״א שהוא האחד[11]) השלם[12]) יעלו ב׳[13]) שלמים נחברם[14]) אל ק״י יהיו קי״ב וישארו[15]) קי״ט חלקים מרכ״א[16]) נחלק קי״ב על י״ז שלמים יעלו ו׳ פשוטים שלמים[2]) ונשארו[17]) י׳ פשוטים שלמים[2]) נשיבם על[18]) [0]מנין רכ״א[19]) ונחבר[20]) אליהם[21]) קי״ט הנשארים[22]) שהם[23]) חלקים מפשוט אחד שהוא רכ״א חלקים ויהיו ט׳ ב׳ נ׳ ב׳[24]) נחלקם על י״ז[25]) ויעלו[26]) ז׳ ג׳ א׳[27]) וסך[28]) הכל ו׳ פשו׳[29]) שלמים וקל״ז חלקים שהאחד[30]) רכ״א[31]).

שאלה ראובן שכר שמעון שיחפור לו בקרקע[32]) י׳ באורך[33]) וי׳ ברוחב ויתן לו י״ז[34]) פשו׳ ושמעון חפר ה׳ באורך וה׳ ברוחב אין ספק כי הרביעית[35]) יקח כי כפל חצי על חצי רביעי אחד[36]) שלם כי אלו היה כופל[37]) חצי האורך[38]) על כל הרוחב או חצי הרוחב על כל האורך אז היה לוקח[39]) חצי הממון רק אם אמר שהסכים עמו שיחפור ,ז׳ באורך[33]) וו׳ ברוחב[40]) וה׳ בעומק ויתן לו י״א פשו׳ והוא חפר ו׳ באורך וה׳ ברוחב[40]) וד׳ בעומק [0]כמה שכרו הנה[36]) אנחנו צריכים לערכים ונכפול[41]) [0]המספר הראשון שהוא[36]) ז׳ על ו׳ הרי[42]) מ״ב כפלה[43]) על ה׳ שהוא העומק ויהיו[44]) ר״י גם נכפול המספר השני שהוא ו׳ על ה׳ והם ל׳ גם נכפול זה על ד׳ שהוא העומק יהיו

1) H: צריכים. 2) R: f. 3) H u. R: f. 4) R: f; H: צריכים. 5) H u. R: נכפול. 6) H: ויעלה. 7) B am Rande: בכפלם גם כן בי״ז יהיו. 8) H u. R: יהיה. 9) R: כפול. 10) H u. R: נחלק אותם. 11) H: אחד. 12) H u. R: שלם. 13) R: שנים. 14) R: ונחברים. 15) R: ונשארו. 16) R: מן רכ״א; H u. R noch: והנה. 17) H: וישארו. 18) R: אל. 19) R: רכ״א מנין. 20) H: נחבר; R: ונחברם. 21) H: f; R: אל. 22) H u. R noch: עמהם. 23) Von שהם bis חלקים (folg. Z.) fehlt in H u. R. 24) H u R: אלפים שכ״ט. 25) R noch: שלמים. 26) H u. R: יעלו. 27) H u. R: קל״ז. 28) H u. R: סך. 29) H: f. 30) R: שאחד. 31) B noch: וזה הדמיון שלמעלה שלשה חלקים מי״ג שבאחד שלם Diese Bemerkung bezieht sich auf das letzte Rechenschema S. 51. H, M, M 150 u. R. haben hier noch folgendes (in H u. R fehlt das in [ ] Gesetzte): והם ח׳ חלקים מי״ג [כי הי״ג הם י״ז] עם חלק אחד מי״ז בחלק או אם תרצה הם י׳ חלקים מי״ז [כי י״ז הם י״ג] עם ד׳ חלקים מי״ג בחלק (Soweit R S. 20). 32) H: קרקע. 33) H: בארך. 34) H: ח׳ (!). 35) B: הרביעי. 36) H: f. 37) Soll vielleicht heissen: חופר. 38) H: הארך. 39) H: לו ליקח. 40) H: ברחב. 41) H: והנה נכפול. 42) H: הם. 43) H: גם זה. 44) H: יהיו.

0 אא
0 ב א 0אב

ק״כ ועתה[1]) נעשה[2]) דמיון הערכים[3]) כזה[1]) כפלנו האמצעיים הידועים[4]) והיו[5]) אלף וש״כ[6]) חלקנום על ר״י עלו ו׳ שלמים ונשארו ס׳ שהם[7]) שתי שביעיות פשוט. שאלה אדם מוכר חטה י״נ מדות בב״נ פשוי כמה מדות יתן בז׳ פשו׳ נעשה דמיון הערך[8]) [0]כמשפט הזה[1]) הנה כפול[9]) הקצוות שהם נודעים יהיו[10]) צ״א נחלקם על כ״נ יהיו.[10]) נ׳ מדות וכ״ב[11]) חלקים מכ״נ במדה אחת ועוד נהפוך הענין[12]) שנבקש לדעת בכמה יתן[13]) ז׳ מדות והנה נעשה הדמיון[14]) כזה[1]) נכפול הקצוות יהיו קס״א נחלקם על י״נ יהיו י״ב פשו׳ וה׳[15]) חלקים מי״נ[16]) בפשו׳ אחד. שאלה אדם שלח רץ שילך בכל יום כ״ט מילין ואחר עשרה ימים שלח רץ אחר[1]) אחריו שילך בכל יום יום ל״ז מילין מתי ישיגנו נכפול המילין שהלך בי׳ ימים יהיו ר״צ נחלקם על היתרון שבין[17]) שני המהלכים שהוא ח׳ והנו ל״ו ימים ורביעית יום. שאלה אדם [0]יצא מעירו[18]) ונכנס[19]) במדינה[20]) אחרת[18]) נדר[21]) אם [0]יכפול המקום[22]) ממונו [0]יתן בכל יום[23]) ב׳ פשו׳ לסוף ד׳[24]) ימים הלך ממונו[25]) כמה הביא האמת[26]) כי [0]היה לו[27]) ב׳ פשוטים פחות שמינית פשוט. שאלה ראובן יצא מעירו ללכת לקראת שמעון אחיו לעירו בקר יום ראשון של[18]) ראש[28]) החדש[29]) ובעצם[30]) היום הזה[18]) יצא גם[31]) שמעון מעירו [0]ללכת לקראת[32]) ראובן אחיו לעירו[18]) והמרחק בין[33]) [0]שני הערים[34]) ק׳ מילין ומהלך ראובן ביום אחד[18]) י״ט מילין ומהלך שמעון ביום אחד[18]) י״ז מילין נשאל מתי יתחברו[35]) ככה[36]) תעשה חבר שני המהלכים והם ל״ו חלק עליו[37]) המאה מילין[18]) יהיה שני[38]) ימים ישארו[39]) כ״ח חלקים מל״ו ביום אחד שהם ז׳ תשיעיות יום ותוכל להושיבם[40]) לשעות היום כדרך[41]) הערכין[42]) וככה תעשה[43]) כפלנו[44]) ז׳ על י״ב עלו פ״ד חלקנו[45]) על ט׳ עלו ט׳ והם שעות נשארו ג׳ שהם שלישית שעה ועל דרך אחרת ידענו כי

ז גב
0 גא

ז גא
0 גב

0 בא
ז ט

---

1) H: f. 2) H: ונעשה ככה. 3) H noch: גלגל י״א ק״כ ר״י. 4) H: הנודעים. 5) H: עלו. 6) H: ש״כ. 7) in H doppelt. 8) H noch: ד׳ כ״נ גלגל י״נ. 9) H: נכפול. 10) H: יעלו. 11) H: גם כ״ב. 12) H: הדבר. 13) H noch: לו. 14) H noch: ד׳ י״נ גלגל כ״נ הנה. 15) H: גם ה׳. 16) H noch: חלקים. 17) H: שיש בין. 18) H: f. 19) H: נכנס. 20) H: במקום. 21) H: ונדר. 22) H: המקום יכפול. 23) H: בכל יום יתן. 24) B: ה׳. 25) H noch: נשאל. 26) H: והאמת. 27) H: הביא. 28) H: בראש. 29) H: חדש. 30) H: ובאותו. 31) H: ג״כ. 32) H: לבא לעיר. 33) H: שבין. 34) H: שתי העיירות. 35) H: יפגעו זה את זה. 36) H: וככה. 37) H: עליהם. 38) H: ב׳ והם. 39) H: וישארו. 40) H: להשיבם. 41) H: בדרך. 42) H: הערכים. 43) H noch: והנה. 44) H noch: הקצוות שהם. 45) H: חלקנום.

ערך [0]י״ב אל ט׳[1]) כמוהו ושלישיתו כי תשיעיות היו לנו והנה נקח לז׳ תשיעיות ז׳ שלישיות נחלקם[2]) [0]על ג׳[3]) יהיו ב׳ שעות ושלישית שעה נחברם אל השבע[4]) שהיו[5]) לנו והנה הדבר[6]) שוה ואם בקשנו לדעת כמה מילין הלך ראובן כבר ידענו כי בשני ימים הלך ל״ח מילין וכבר אמרנו כי ז׳ תשיעיות היום הלך והנה נעשה הערך כך[7]) כפלנו ז׳ על י״ט עלו קל״ג חלקנום על ט׳ עלו י״ד[8]) ושבע תשיעיות והנה הכל נ״ב מילין וז׳ תשיעיות.

ט	ז
טא	0

שאלה אדם שכר ג׳ אחים ראובן שמעון ולוי שיעשו עבודתו[9]) [0]כ׳ ימים[10]) [0]מן הבקר[11]) עד הערב מאיזה מהם[12]) שתהיה[13]) ולא תשבות[14]) המלאכה והנה אם עבד ראובן כל הימים יתן לו ה׳ זהובים [0]ואם שמעון[15]) ד׳ [0]ואם לוי[16]) ג׳ והנה בין כלם עבדו[17]) [0]הכ׳ ימים[10]) והיה יושב[18]) עליהם שומר כותב כמה שעות ביום עבד כל אחד מהם וכמה חלקי שעה[19]) והנה[20]) באחרונה נתן לכל אחד מהם חלק שוה נרצה לדעת כמה[21]) החלק[22]) מכל[23]) אחד מהם [0]שלקח דע כי[18]) ראובן ישמש[24]) ד׳ ימים בזהוב אחד ושמעון ה׳ ימים ולוי ו׳ ימים וב׳ שלישיות יום והנה הכל ט״ו שלמים וב׳ שלישיות יום אחד[18]) נחלק כ׳[25]) על זה המספר ועלה אחד שלם ונשארו[26]) ד׳ שלמים ושלישית אחד[27]) והנה בעבור[28]) השלישית[29]) נשיב הכל שלישיות[30]) והנה נשיב[31]) הכ׳[32]) יום ס׳ שלישיות והט״ו וב׳ שלישיות מ״ז שלישיות והד׳ ושלישית יום י״ג[33]) והנה כל אחד לקח זהוב אחד וי״ג פשוטים ממטבע מ״ז בזהוב ועתה[34]) נבקש כמה חיוב[35]) כל אחד שיעבוד עד שישלימו[36]) הכ׳[37]) יום והנה נחל מלוי שהוא חייב לשמש בזהוב שלקח ו׳ ימים וב׳ שלישיות יום ונעשה מאלה שלישיות ויהיו כ׳ ונבקש לדעת כמה יש לו לעבוד[38]) בעבור י״ג פשו׳ שלקח ונעשה[39]) הערך כך[18])

ד	ז	גא
ב	0	0

כפלנו י״ג על כ׳[40]) והיו ר״ס חלקנום על מ״ז עלו ה׳ ונשארו כ״ה חלקים נוסיף[41]) הה׳[42]) על הכ׳[43]) ויהיו[44]) כ״ה שלישיות גם כ״ה חלקים ממ״ז וחלקנו[45]) אלה השלישיות על ג׳ עלו ח׳ שלמים ונשאר אחד נקח לו[18]) ד׳

---

1) B: ט׳ אל י״ב. 2) H noch: על ט״ש. 3) in H dünn durchgestrichen. 4) H: ד׳. 5) H: שהיה. 6) H: המספר. 7) H: f. 8) H noch: מילין. 9) H: עבדתו. 10) H: עשרים יום. 11) H: מהבקר. 12) H: מקום(!) 13) H: שיהיה. 14) H: תשבת. 15) H: ולשמעון. 16) H: וללוי. 17) H: עבדוה. 18) H: f. 19) H: השעה. 20) H: וחתם(!). 21) H noch: הוא. 22) H noch: שלקח. 23) H: כל. 24) H: שמש. 25) H: ב׳. 26) H: ונשאר. 27) H: יום. 28) H noch: שיש לנו. 29) H: שלישית. 30) H: שלישית לדרך. 31) H: נשים. 32) H: העשרים. 33) H noch: שלישיות. 34) H: עתה. 35) H: חייב. 36) H: שישלימהו. 37) H: הג׳ (Rand: הכ׳). 38) H: שיעבוד. 39) H: נעשה. 40) H noch: שהם הקצוות. 41) H: חברנו. 42) H: ה׳. 43) H: עשרים. 44) H: וזהו. 45) H: חלקנו.

שעות שהם[1]) שלישית יום גם[2]) נכפול כ״ה חלקים על ד׳ יעלו[3]) מאה נחלקם על מ״ז עלו שתי שעות ונשארו ו׳ חלקים והנה לוי עבד ח׳ ימים גם ו׳ שעות גם ו׳ חלקים ונבקש לדעת כמה עבד שמעון והנה חייב[4]) לעבוד בעבור הזהוב ה׳ ימים שהם ט״ו שלישיות ונבקש לדעת כמה יעבוד בעבור [0] י״ג פשוי[5]) שלקח והנה נעשה הערך כך[6])

ד	ז	גא
הא		0

נכפול ט״ו על י״ג יעלו[7]) קצ״ה נחלקם על מ״ז עלו[8]) ד׳ ונשארו ז׳ חלקים נחבר הד׳ אל הט״ו[9]) כי שלישיות הם יעלו[10]) י״ט שלישיות נחלקם על ג׳ יהיו ו׳ ימים שלמים[11]) ונקח לאחד[12]) הנשאר ד׳ שעות גם[13]) נכפול ז׳ על ד׳ יהיו[8]) כ״ח[14]) והנה[15]) הם ו׳ ימים ד׳ שעות וכ״ח חלקים וככה עבד שמעון ונבקש לדעת[16]) כמה עבד ראובן והנה עבד בשביל הזהוב ד׳ ימים שהם י״ב שלישיות ונעשה בעבור הי״ג[17]) פשוטים שלקח[6]) הערך כך[6])

ד	ז	א	ג
ב	י		0

נכפול[18]) י״ג על י״ב יעלו קנ״ו[19]) נחלקם[20]) על מ״ז עלו[8]) ג׳ ונשארו ט״ו חלקים חברנו אלו[21]) הג׳ עם[22]) הי״ב[23]) שהיו[24]) לנו היו[25]) ט״ו והם שלישיות והנה עבד ה׳ ימים גם נכפול הט״ו חלקים על ד׳ עלו[8]) ס׳ חלקים[6]) נחלקם על[22]) מ״ז עלתה שעה אחת ונשארו י״ג חלקים משעה וככה עבד ראובן וכאשר תחבר אלה החלקים יתחבר מהם שעה אחת בלי תוספת ומגרעת[26]) וכאשר תחבר זאת[27]) השעה אל השעות הנזכרות יהיו י״ב שעות שהוא[28]) יום אחד וכאשר תחבר[29]) היום לימים[30]) הנזכרים יהיו עשרים יום[31]) בלי תוספת ומגרעת[26]). **שאלה** אדם היו לו י׳ מדות מתירוש ורצה לבשלם[32]) עד שלא ישאר מהם[6]) כי אם השלישית והנה החל[6]) לבשל[33]) עד שנשארו מהם[6]) ח׳ מדות[6]) ונשפך[34]) ב׳[35]) מדות[6]) והנה ירצה לבשלם[32]) עד שיהיו כמשפט הראשון והנה יש לך ג׳ מספרים ידועים הא׳ כמה שלישית י׳ ידוע כי הוא ג׳ ושליש וידוע כי שמנה יהיו המדות שיתבשלו[36]) וידוע כי ששה נשארו והנה

ח	ו	
ג	ג	0

תעשה[37]) הדמיון ככה והנה[38]) נכפול ו׳ על ג׳ ושליש יהיו כ׳ נחלקם על ח׳ יהיו שנים וחצי. **דמיון אחר** היו[39]) לנו[40]) ט׳ מדות תירוש וירצה

---

1) H: כי הם 2) B: ג׳. 3) H: יהיו. 4) H: יש לו. 5) H: הפשוטים הי״ג. 6) H: f. 7) H: עלו. 8) H: יעלו. 9) H: ט״ע. 10) H: יהיו. 11) H noch: ונשאר שליש א׳. 12) H: לאותו אחד. 13) H: ג׳. 14) H noch: חלקים ממ״ז. 15) Von והנה bis חלקים fehlt in H. 16) H: לידע. 17) H: י״ג. 18) H: כפול. 19) B: ק״ט. 20) H: חלקם. 21) H: אלה. 22) H: אל. 23) H: י״ב. 24) H: שהיה. 25) H: הנה. 26) H: או מגרעת. 27) H: זו. 28) H: שהם. 29) H noch: זה. 30) H: אל הימים. 31) H: ימים. 32) H: לבשל אותם. 33) H: נתבשל. 34) H: ונשפכו. 35) H noch: ונשארו ו׳. 36) H: שנתבשלו. 37) H: נעשה. 38) Von והנה bis וחצי fehlt in M. 39) H: f. 40) H: לו.

שיתבשלו עד שישאר[1]) השליש והוא נתבשל[2]) עד שנשארו ו׳ מרות ונשפכו ד׳ [0]ובי׳ נשארו[3]) וככה[4]) הערך כפול[5]) ב׳ על ג׳ עלו ו׳ יהיה אחד והנה המשפט להיות המבושל מדה אחת. שאלה ממון חברנו חמישיתו ושביעיתו ותשיעיתו והיו[6]) עשרה כמה הממון

ב ו
0 ג

נבקש המורה והוא שט״ו והחלקים הנזכרים הם קמ״ג כאשר[7]) תחלק שט״ו על ה׳ יעלו ס״ג ובשתחלק על ז׳ יעלו מ״ה ועל ט׳ יעלו ל״ה חברם יחד יעלו קמ״ג ונעשה[8]) הערך כך[9]) נכפול שט״ו על י׳ יעלו ג׳ אלפים וק״נ[10]) נחלקם[11]) על קמ״ג

גדא האג
0א 0

עלו[12]) כ״ב שלמים וד׳[13]) חלקים מקמ״ג[14]) נעשה[15]) להפך ממון[16]) חסרנו ממנו חמישיתו שביעיתו[17]) ותשיעיתו ונשארו י׳ נחסר קמ״ג שהם[18]) השברים מן שט״ו שהוא המורה ישארו קע״ב ונעשה[19]) הערך[20]) כך[9]) כפלנו י׳ על שט״ו עלו ג׳ אלפים וק״נ[10]) חלקנום על קע״ב עלו י״ח שלמים[9]) ונ״ד[21]) חלקים מקע״ב

0א 0
בזא האג

לקחנו חמישית ושביעית ותשיעית זה המספר ישארו[22]) לנו[9]) י׳ שלמים ועל זה הדרך שאלת האילן[23]) ששלישיתו במים ורביעיתו בעפר ולמעלה מן המים י׳ אמות כמה גבהות[24]) כל[9]) האילן[23]) נבקש מנין[25]) שיש לו שלישית ורביעית והוא י״ב ושלישיתו ורביעיתו מחוברים ז׳ נחסרם מי״ב ישארו ה׳ נעשה הערך כך[9]) הנה כפלנו הקצוות עלו[26]) ק״כ חלקנום[27]) על ה׳ עלו[28]) כ״ד וזהו גבהות[29])

0א 0
ה ב א

כל[9]) האילן כי שלישיתו שמנה ורביעיתו ששה והמחוברים[30]) י״ד נחסרם מכ״ד[31]) ישארו י׳ שלמים [0]לא פחות ולא יותר[32]). דמיון אחר אילן שביעיתו[33]) במים ותשיעיתו בעפר ולמעלה [0]מן המים[9]) ח׳ א׳[34]) והנה המורה ס״ג נחסר ממנו י״ז שהוא השביעית והתשיעית נשארו מ״ו ונעשה הערך כך[9]) הנה כפלנו הקצוות והיו[35]) תק״ד חלקנום על מ״ו עלו י׳ שלמים גם ל״ד חלקים ושביעית זה המספר אחד שלם וכ״ה[36]) חלקים ותשיעיתו[37]) אחד שלם וט׳[38]) חלקים

ח 0
זד גו

---

[1]) H: שישארו. [2]) H: נתבשלו. [3]) H: ונשארו ב׳. [4]) H: ככה. [5]) Von נכפול bis אחד fehlt in H. [6]) H: יהיה. [7]) Von כאשר bis קמ״ג fehlt in H. [8]) H: נעשה. [9]) H: f. [10]) H: ק״נ. [11]) B: חברנום. [12]) H: יעלו. [13]) H: גם ד׳. [14]) H: מן קמ״ג. In B folgt hier ein Zusatz, der am Anfang und am Ende mit ת׳ bezeichnet ist. [15]) H: הנה נעשה. [16]) H: הממון. [17]) H: ושביעיתו. [18]) H: שהוא. [19]) H: והנה נעשה. [20]) H noch: הנה. [21]) H: גם נ״ד. [22]) H: ונשארו. [23]) in B übergeschrieben הרומת. [24]) H: גובה. [25]) H: חשבון. [26]) H: יהיו. [27]) H: נחלקם. [28]) H: יעלו. [29]) H: גבה. [30]) H: המחוברים. [31]) H: מן כ״ד. [32]) H: בלי תוספת ומגרעת. [33]) H: ששביעיתו. [34]) = אַמּוֹת. [35]) H: והנה הם [36]) H: גם כ״ח. [37]) H: ותשיעית. [38]) H: גם ט׳.

תברנו החלקים והנזכרים[1]) והם ל״ד והשלמים ב׳ חסרנום מהמספר הנזכר נשארו[2])

ח׳. שאלה [0]יעקב מת[3]) והוציא ראובן בנו שטר בשני[1]) עדים[4]) כשרים שנתן לו לבדו[1]) יעקב אביו[1]) כל הממון [0]שהיה לו[1]) וצוה[5]) כן מחמת מיתה ביום מותו נם[6]) הוציא שמעון בנו שטר שאביו צוה מחמת מיתה שינתן[7]) לו חצי ממונו נם[6]) לוי הוציא שטר [0]שאביו צוה[1]) שינתן[7]) לו שליש[8]) ממונו[9]) נ״כ [0]הוציא יהודה[10]) שטר שינתן[7]) לו רביעית ממונו[9]) ולכלם [0]יום אחד[1]) וזמן[11]) אחד [0]ושעה אחת בירושלם שכותבין בו שעות והנה[1]) חכמי[12]) ישראל מחלקים[13]) אותו על דרך בקשת כל אחד וחכמי הגוים[14]) על דרך[1]) ערך הממון[15]) שלכל[16]) אחד וחכמי[17]) החשבון יחשבו כי הממון[18]) היה[19]) אחד וכאשר תחבר אליו חציו ושלישיתו ורביעיתו יהיה הכל שנים וחצי ששית והנה נשים האחד שלם ששים שיש לו כל החלקים הנזכרים והנה יהיה בין הכל קכ״ה או נשים האחד שלם[20]) י״ב והשברים הנזכרים י״ג[21]) ושוה יצא המספר[1]) באחרונה איזה מהם שתקח והנה נבקש כמה יקח ראובן כפי ערך ממונו ונעשה[22]) הערך ככה על דרך ששים כי הוא

0 ו 0
הבא 0 בא

מבקש כל[23]) הממון[1]) ונאמר כי הממון עשרה דינרים שהם ק״כ פשוטים וזה תורת[24]) [0]ערך הממון[25]) שיקח ראובן[26]) כפלנו הקצוות ועלו[27]) ז׳ אלפים ור׳ חלקנום על קכ״ה עלו[27]) נ״ז[28]) פשו׳ וע״ה חלקים וזה[29]) חלק ראובן וזו[30]) צורת ערך[31])

0 ג 0
הבא 0 בא

שמעון[32]) נכפול[33]) הקצוות [0]ונחלק כמשפט וזו[34]) צורת[35]) חלק לוי [0]נכפול ונחלק כמשפט וזו[34]) צורת[35]) חלק יהודה [0]ענין אחר[34]) בדרך[36]) קצרה [0]יקח שמעון

0 ב 0
הבא 0 בא

חצי חלק ראובן[37]) [0]גם יקח[34]) לוי[38]) שליש[39]) חלק ראובן [0]גם יקח[34]) יהודה[40]) רביעית חלק ראובן וכאשר תחבר כל אלה החלקים והשלמים יהיו ק״כ פשו׳ שהם י׳

0 הא
הבא 0 בא

דינ׳ ועל דרך חכמי[41]) ישראל יאמרו הג׳ אחים[42]) הגדולים ליהודה אחיהם[34]) אין אתה מערער רק על ל׳ פשוטים

---

1) H: f. 2) H: ונשארו. 3) H: מת יעקב. 4) H: בעדים. 5) H: שצוה. 6) H noch: כן. 7) H: שיתן. 8) H: שלישית. 9) H: הממון. 10) H: יהודה הוציא. 11) H: זמן. 12) H: וחכמי. Von [ו]חכמי bis אחד steht in H erst vor וחכמי (Z. 9). 13) H: מחלקין. 14) H noch: יחלקו זה הממון. 15) H: ממון. 16) H: כל. 17) H: והנה חכמי. 18) H: החשבון. 19) H: הוא. 20) H: השלם. 21) B: f. 22) H: ועשה. 23) H: הכל. 24) H: צורת. 25) H: הממון ערך. 26) H noch: והנה. 27) H: יעלו. 28) Soweit geht M 150. 29) H: וזהו. 30) H: וזאת. 31) H: חלק. 32) H noch: ונעשה כמשפט. 33) H: שנכפול. 34) H: f. 35) H: וצורת. 36) H: ובדרך. 37) H: יקח ראובן חצי חלק שמעון [übergeschrieben: ס״א יקח שמעון חצי חלק ראובן. 38) H: ולוי. 39) שלישית. 40) H: ויהודה. 41) B: f. 42) H: האחים.

וערעור כל אחד ממנו שוה בהם קח ז׳ וחצי שהוא הרביעית[1] ולך מעמנו וכמו כן יקח כל אחד מהג׳[2] אחים[3] ועוד יאמר ראובן ללוי אין אתה מערער רק על מ׳ פשו׳ וכבר לקחת חלקך מהל׳ שארבעתנו ערערנו עליהם קח אתה שלישית י׳ שהוא רביעית מ׳ ולך מעמנו והנה חלק לוי עשרה[4] וחמש ששיות[5] פי׳ כי החצי מן הז׳[6] והחצי[7] שלקח כבר הם ג׳ ששיות ושליש אחד מן הי׳ הם ב׳ ששיות הרי ה׳ ששיות. ת׳[8] גם יאמר ראובן לשמעון אין אתה מערער אלא על חצי הממון שהוא ס׳ והחצי האחר הוא[9] כלו[10] שלי וכבר לקחת חלקך[11] מהמ׳ והנה נשאר ביני ובינך הערעור[12] בעשרים[13] קח הציים ולך מעלי והנה חלק שמעון עשרים[13] והמש ששיות פשו׳ וחלק ראובן שמונים[4] גם[9] חמש[14] ששיות פשו׳ אחד[9] וכאשר תחבר[15] אלו[16] החלקים יהיו עשרה דינ׳ ועתה אפרש דרך חכמי המזלות בספרי[17] הלוחות[18] בתקון[19] המשרתים [0]כי בתקון[20] הלבנה גם בתקון ה׳[20] המשרתים טור יקרא טור הערך וזה הערך הוא [0]אל ס׳[21] כי אם היה כתוב בטור הערך ס׳ יהיה בטור אחריו שיקרא הטור החמשי[22] או הכתוב[23] בטור השביעי מה שיהיה כתוב באחד מהם ראשונים לבדם או ראשונים ומעלות הכל יקח וככה בתקון מקום הלבנה ואם היתה פחותה מס׳ יקח כפי הערך מהחלקים הכתובים בטור החמישי או השביעי. דמיון יש חלקים יתרים על המעלות מ׳ ובטור הערך ט״ו ואתה צריך לכפול ט״ו [0]על מ׳[24] והעולה תחלקנו על ס׳ והוא המבוקש ועשה[25] דמיון[26] הערך[20] כזה כפול ט״ו על מ׳ עלו ו׳ מאות חלקם

ה א 0ו[27]
0[28] 0ד

על ס׳ יעלו [0]י׳ חלקים[29] ויותר קרוב מזה שתבקש מה ערך מ׳ אל ס׳ והם ב׳ שלישיות גם זה הערך קח מט״ו והנו[30] י׳ או בקש מה ערך ט״ו אל ס׳ והנו[30] רביעית ס׳[31] קח[32] רביעית[20] מ׳[33] והוא[20] י׳. דמיון אחר המספר האחד ל׳ והשני מ״ה והנה ערך מ״ה אל ס׳ ג׳ רביעיות נקח[34] שלש[35] רביעיות ל׳ והם כ״ב וחצי שהם ל׳ שניים או נקח הערך [0]מן הל׳[36] שהוא חצי ס׳ נ״כ[37] נקח חצי מ״ה והנו[30] כ״ב וחצי. דמיון לב׳ מספרי׳ שהאחד יש לו ערך [0]והשני אין לו ערך כמו[20] המספר[38] האחד כ׳ והשני

---

1) H: רביעית. 2) H: משלשת. 3) H: האחים. 4) H noch: פשוטים. 5) H noch: פשוט. 6) H: השלשים. 7) H: וחצי. 8) H: f, ת׳ = תּוֹסֶפֶת (Zusatz). Das Folgende steht aber auch in den andern Ms. 9) H: f. 10) H: כולו. 11) H: חלק. 12) H noch: הוא. 13) H: שנים [Rand: עשרים]. 14) H: וחמש. 15) H: תחלק. [Rand: תחבר]. 16) H: אלה. 17) M: בספר. 18) M: לוחות. 19) M: תקון. 20) H: f. 21) H: לס׳. 22) H: החמישי. 23) B: תכתוב. 24) H: בארבעים. 25) H noch: עוד. 26) H: הדמיון. 27) H: ג׳ר(!). 28) H: ט׳(!). 29) H: חלקים עשרה. 30) H: והוא. 31) H noch: וככה. 32) H: יקח. 33) H: ממ׳. 34) H: תקח. 35) H: שלשת. 36) H: משלשים. 37) H: גם. 38) H: שהמספר.

ל״ג והנה ערך כ׳ אל ס׳ שלישית והנה[1]) נקח שלישית ל״ג והם י״א ראשונים וככה יבא בדרך הכפל כאשר תכפול כ׳ על ל״ג ותחלק העולה על ס׳ [0]והעולה בחלוק יהיה י״א[2]) ובעבור כי ל״ג קרוב מחצי[3]) ס׳ נקח גם הערך ממנו והנו[4]) י׳ ראשונים שהוא חצי כ׳ ובעבור שיש לנו תוספת ג׳ על החצי נכפול ג׳ על כ׳ יהיו ס׳ ואין ספק כי הם שניים כי כפל ראשונים על ראשונים יעלו[5]) שניים כי אחד על אחד[6]) שנים והם ס׳ שניים והם חלק ראשון נחברם על[7]) י׳ והוא[8]) י״א. דמיון אחר המספר האחר כ׳ והשני כ״ח והנה[9]) ערך כ׳ אל ס׳ שלישית[10]) ושלישית כ״ח ט׳ ראשונים וכ׳ [11]) שניים ועוד נחשוב כי כ״ח חצי ס׳[12]) כי הוא קרוב ממנו והנה חצי כ׳ י׳ ובעבור כי [0]ב׳ יחסרו מהחצי[13]) נכפול ב׳ על כ׳ יהיו מ׳ שניים נחסרם מהראשון[14]) אחד יהיו הנשארים ט׳ ראשונים וכ׳ שניים. דמיון לחסר הערך שחשבונו האחד י״ד והשני כ״ט והנה נקח הערך מכ״ט ונחשוב כי הוא חצי ס׳ נקח חצי י״ד והם ז׳ ראשונים ובעבור כי אחד יחסר מהחצי נכפלנו על י״ד יהיו י״ד שניים נחסרם[15]) מחלק ראשון ישארו ו׳ ראשונים ומ״ו שניים[16]). דמיון אחר[17]) המספר האחד לחסר והשני[18]) להוסיף והנה נשים[19]) האחד י״ח והשני מ״ב [0]והנה נקח הערך ממ״ב[17]) ונחשוב כי הוא שתי[20]) שלישיות נקח שתי[20]) שלישיות י״ח והנה[21]) י״ב ובעבור שיש לנו תוספת ב׳ נכפלם על י״ח יהיו ל״ו שניים וככה יהיה העולה בדרך הכפל וגם[22]) נקח הערך מי״ח ונחשוב כי הוא שלישית והנה[17]) שלישית[23]) מ״ב י״ד ובעבור שהוספנו ב׳ נכפלם על מ״ב והיו[24]) פ״ד שניים שהם חלק[17]) ראשון[25]) וכ״ד שניים נחסרם מי״ד ישאר[26]) כמספר[27]) הראשון שהוא י״ב גם ל״ו שניים[17]) ונוכל[28]) [0]לקחת עוד[29]) הערך בתוספת משניהם שנחשוב י״ח שהוא רביעית ס׳ והנה[17]) נקח[30]) רביעית מ״ב יהיו י׳ ראשונים ול׳ שניים ובעבור שיש לנו תוספת ג׳ נכפול [0]מ״ב על ג׳[31]) יהיו קכ״ו שניים שהם ב׳ ראשונים וו׳ שניים נוסיף זה על המספר הנזכר יהיו י״ב ראשונים ל״ו[32]) שניים ואילו היינו חושבים כי[17]) מ״ב הם ג׳ רביעיות היה הדבר יוצא נכון וכלל אומר לך כי[33]) אם לא

---

1) H: f. 2) H: יהיה העולה י״א בחלוק. 3) H: לחצי. 4) H: והוא. 5) H: יבואו. 6) H noch: יבא. 7) H: אל. 8) H: יהיו. 9) H: והוא. 10) H: שלישיות. 11) H: ושנים gestrichen [Rand: וכ׳]. 12) H: הששים. 13) H: יחסרו מהחצי ב׳. 14) H: מראשונים. 15) H: נחסרט. 16) H noch: ונוכל לעשות הערך מי״ד שנחשוב כי הוא רביעית ס׳ נקח רביעית כ״ט והם ז׳ ורביעית שהם ט״ו שניים ובעבור כי החסרון מרביעית הוא חלק ראשון נכפול כ״ט על כ״ט יהיו כ״ט שניים נחסרנו מן המספר הנזכר ישארו ו׳ ראשונים [א׳ übergeschrieben] ומ״ו שניים. 17) H: f. 18) H: ואחר. 19) H noch: המספר. 20) H: שני. 21) H: והוא. 22) H: גם. 23) H: ושליש. 24) H: יהיו. 25) H noch: אחד. 26) H: ישארו. 27) H: כמשפט. 28) H: גם נוכל. 29) H: עוד לקחת. 30) H: ונקח. 31) H: אותו עליהם. 32) H: ול״ו. 33) H: f.

היה ערך לחלקים הנמצאים בטור הערך שוב לעשות [0]על דרך[1]) הכפל כאשר הזכרתי בשברים ולעולם ראה אם היו חלקים נוספים על מעלות המוצק המתוקן והם פחותים מל׳ הניחם וקח הראשונים[2]) הכתובים[3]) בטור הערך כנגד המעלות שעברו ואם החלקים שהם עם המוצק המתוקן[4]) יותר מל׳ הוסף מעלה אחת על[5]) המעלות שעברו וקח מה שתמצא[6]) כנגדה בחלקי טור הערך בין שתהיה אחר המעלה השלמה או למעלת ממנה[7]) ואם מצאת המנה המתוקנת שהיא בין ד׳ מזלות עד[8]) ח׳ מזלות ומצאת כי יש הפרש [0]בין חלקי[9]) טור הערך שהם כנגד המעלה שעברה ובין חלקי[10]) טור הערך שכנגד המעלה הנוספת ולא יהיה לעולם ביניהם רק חלק ראשון עשה[11]) כדרך[12]) הכפל שתתן לחלקים הנוספים על המעלה שעברה מה שראוי מהשניים[13]) וזה המעשה יש[14]) לך צורך[15]) בתקון[16]) [0]מאדים או כוכב חמה[17]) רק בתקון שבתי וצדק אין לך[18]) צורך [0]כי אם[19]) בטור החמישי גם בטור[4]) הז׳[20]) אין[21]) מעלות כי אם ראשונים לבדם[4]).

---

1) H: בדרך. 2) H: ראשונים. 3) in H doppelt. 4) H: f. 5) H: אל. 6) H: שנמצא. 7) H: הימנה. 8) H: עם. 9) H: בחלקי. 10) H: חלק. 11) H: ועשה. 12) H: בדרך. 13) H: מן השניים. 14) H: הוא. 15) H noch: גדול. 16) H noch: מקום. 17) H: כוכב חמה או מאדים. 18) H: לו. 19) H: רק אם [Rand: כי אין]; s. Anm. 21. 20) H: בשביעי. 21) in H gestrichen; s. Anm. 19.

השער הז׳

°בהוצאת השרשים[1]

כל °המספרים הם[2] על שלשה דרכים האחד[3] שרשים והשני מרובעים והשלישי לא °שרשים ולא[4] מרובעים[5] והנה המרובע הוא המחובר מכפל שורש[5] על[6] עצמו כמו ט׳ כי[6] הוא[7] מרובע ארכו כרחבו ושרשו ג׳ ויש חשבון שאין לו שורש אמת כלל והוא הרוב[8] כמו ב׳ במעלה הראשונה גם ג׳ וה׳ וו׳ וז׳ וח׳ ולעולם מרובע[9] השלמים[10] גדול מהשורש °והפך הדבר[11] במרובעי הנשברים[12] והיה כן בעבור[8] כי כפל שבר על שבר יהיה המחובר פחות מהשבר הנכפל והיה האחד לבדו שורש ומרובע כי הוא בין השברים[13] והשלמים[14] והנה נתן בתחלה מאזנים הסתכל[15] אם לא היו[8] מאזני המרובע ככפל מאזני השרש על עצמו אין המספר מרובע ואם היה כמוהו יתכן להיות מרובע. דמיון[16] המרובע קמ״ד והמאזנים ט׳ והשרש י״ב ומאזניו ג׳ וכפל[17] על עצמו הוא ט׳ והוא מאזני השרש ת׳[8] מאזנים אחרים אם מאזני המספר ב׳ או ג׳ או ה׳ או ו׳[18] או ח׳ איננו[19] מרובע ואם היו המאזנים אחד מהמרובעים[20] שהם במעלה הראשונה שהם א׳ או ד׳ או ט׳ גם ז׳ עמהם יתכן להיות[21] מרובע מאזנים אחרים אם היה במספר[22] המבוקש ממספרי[23] המעלה הראשונה ב׳ או ג׳ ° או ז׳[8] או ח׳ אין המספר מרובע ואם היה[24] אחד מן המרובעים א׳[25] או[8] ד׳ או[8] ט׳ או מן המתגלגלים שהם ה׳ ו׳[26] יתכן שיהיה המספר מרובע מאזנים אחרים שהם °מאזני צדק[27] אם מצאת במספר המבוקש °מן המעלה[28] הראשונה אחד דע שיש[29] בשורש אחד או ט׳ ואם היה במספר[30] ד׳ דע שיש[29] בשורש ב׳ או ח׳ ואם היה במספר[30] ו׳ דע שיש[29] בשרש ד׳ או (ו׳[31]) ואם[32] במספר[30] ט׳ דע כי יש בשרש ג׳ או ז׳ °ואם במרובע ה׳ דע שיש בשרש ה׳[8] ועתה אתן

---

1) H: הוא השרשים המחוברים. 2) H: מספריהם (!) 3) H noch: הוא. 4) H: מרובעים ולא שרשים. 5) H: שרש. 6) H: f. 7) H: שהוא. 8) H: f. 9) H: המרובע. 10) H: בשלמים. 11) H: והדבר להפך. 12) H: נשברים. 13) H: המרובעים. 14) H: ובין השלמים. 15) H: השתכל. 16) Von דמיון bis ת׳ fehlt in M. 17) H noch: ג׳ (übergeschrieben). 18) H: ד׳. 19) H: אינו. 20) H. מן המרובעים. 21) H: להיותו. 22) H noch am Rande: נ״ל המספר. 23) H. מספר. 24) H noch: שם. 25) H: ג׳ [Rand: נ״ל א׳]. 26) H: ד [Rand: נ״ל ו׳]. 27) Vgl. Lev. 19, 36. 28) H: שהם במעלה. 29) H: כי יש. 30) H: בו. 31) H noch am Rande: ו׳ נ״ל. 32) H noch: היה.

לך דרך שתוכל לדעת איזה מן השנים הנזכרים יהיה בשרש ועתה שים
לבך כי המרובעים במעלה הראשונה הם נ' והם א' ד' ט' ובמעלה השנית
ו' והם י"ו כ"ה ל"ו מ"ט ס"ד פ"א וכל המעלות שהם אחר °אלה השתים[1]
דרך אחת להן כי כל מעלה שאיננה[2] זוג הולכת על דרך המעלה[3]
הראשונה וכל מעלה שהיא זוג הולכת[4] על דרך המעלה השנית ולעולם
יהיו המרובעי' הנמשלים למרובעים[5] שהם במעלה הראשונה מספר אחד
ואשר הם במעלה השנית וכל זוג הם שני מספרים גם כל הנמשלים
ומהנמשלים[6] תוכל לדעת כל המרובעים שהם לפניהם או לאחריהם[7]
וכאשר תדע שרש[8] המעלה[9] הראשונה או השנית ותרצה לדעת שרש
הנמשל באיזו מעלה שיהיה ככה תעשה דע[5] כי ההוה[10] במעלה הראשונה
מהאחדים הם[11] במעלה השלישית[12] עשרות ובחמישית מאות ובשביעית
אלפים ובתשיעית עשרת אלפים ובאחד עשר מאת[13] אלף וככה עד אין קץ
בדלוג כי ידלג ממספר[14] שאיננו[15] זוג אל מספר[14] שאיננו[15] זוג והאחדים
שהם במעלה השנית בשרשים הם מעלה הרביעית עשרות ובששית מאות
ובשמינית אלפים ובעשירית עשרת אלפים ובשנים עשר °מאה אלף[16] כי
לעולם ידלג מזוג אל זוג. ועתה אומר לך איך תעשה כאשר תדע המרובע
הנמשל ותדע שרשו חסר[17] המרובע מהמספר המבוקש אחר שתשמור שלא
תקח לעולם כי אם המרבע שעבר שהוא קרוב °אל מספר[18] וראה המרחק שבין
המרבע[19] וחלקהו על כפל שרש המרבע שעבר וככה עשה[20] שלא תתן
לו כל מה שתוכל רק הנח ממנו שתוכל לקחת מרבע מה שעלה בחלוק
וכאשר תראה שיהיה המרחק בין המרובע שעבר כמספר[14] מה[5] שעלה
בחלוק[21] אז תדע שהמרבע[22] אמת ואם היה המספר המבוקש פחות
מהמרבע הנמשל[23] ראה כמה מרחק בין מספרך ובין המרבע הבא לפי
שאתה צריך לתן לו מעט יותר ממה שתוכל בעבור היות מספרך לפני
המרבע הנמשל כאשר אפרש ואל תכנים במספרך מרובע החלוק וראה אם
היה המספר כמספר כפל השרש כפול אז תדע °כי חשבונך[24] אמת כי[25]
אם היה[26] אחד חסר °מן העשרות[27] אחד וישארו[28] ט' °ובדרך הזה[29]

---

1) H: שני מעלות. 2) H: שאינה. 3) H: מעלה. 4) H: הלכת. 5) H: f.
6) B: והנמשלים. 7) H: אחריהם. 8) H: השרש. 9) H: במעלה. 10) H: ההווה.
11) H: יהיה; M. noch: ר"ל כי המרובעים. 12) H: השנית [Rand: השלישית נ"ל].
13) H: מאות. 14) H: המספר. 15) H: שאינו. 16) H: אלף מאות. 17) H: הסר.
18) H: למספרך. 19) H noch am Rande: ובין מספר. 20) H: תעשה. 21) H
noch: בכפול כפל על כפל השורש שעבר עם תוספת מרובע מה שעלה בחלוק.
22) H: כי המרובע. 23) B, H noch: כלומר שהמרבע הנמשל הבא הוא יותר קרוב
אל מספרך מהמרבע הנמשל שעבר ת'. Dieses ת' = תוספת „Zusatz“ fehlt in H.
24) H: שחשבונך. 25) H: f. 26) H noch: מספר. 27) H: מהעשרות. 28) H:
וישאר. 29) H: דרך זה.

תוכל לדעת[1]) כשתמצא אי במרבע או ט' ראוי להיות בשרש : כאשר תראה בדמיונות[2]). דמיון בקשנו לדעת מרובע שעבר קרוב אל מאתים והנה זה מהמעלה השלישית שאיננה זוג ונבקש זה מהמעלה הראשונה וכבר אמרנו כי המרבעי' שיש בה[3]) א' ד' ט' והנמשלי' אליהם מאה וד' מאות וט' מאות והנה[4]) מאה הוא המרבע שעבר ושרשו י' כי כן אמרנו מה שהם במעלה הראשונה אחדיי יהיו במעלה השלישית עשרות נחסר המרבע מחשבוננו [0]ונשארו ק'[5]) וכבר אמרנו כי השרש[6]) י' וכפל וכ' והנה אם חלקנו ק' על כ' [0]ונתן לו ה'[2]) לא ישאר[7]) כלום שנוכל לקחת ממנו מרבע מה שעלה בהלוק והנה נתן לו ד' כפולים על כ' הם פ'[8]) נשארו כ' נחסר ממנו י"ו שהוא מרובע מה שעלה[9]) בחלוק ישאר ד' נחסרנו מהמאתים[10]) ישארו[11]) קצ"ו וזהו המרבע הקרוב אל מאתים ונוסיף ד' שעלה בחלוק על השרש הראשון שהיה י' יהיו י"ד וזהו שרש[12]) המרבע. באמת והנה נבהן אותו במאזנים כמשפט ידוע כי [0]מאזני י"ד[2]) ה' וכפלו על עצמו כ"ה והנה המאזני' ז' וככה בדרך קצ"ו[13]) ובמאזני' אחריי בעבור שיש שם חשבון מתגלגל[14]) נכון להיותו מרבע ובמאזני' אחריי בעבור שיש במרובעו ו' ראוי להיות[15]) בשרש[16]) ד' או ו'[17]) והנה המרחק מהמרבע הנמשל ק'[18]) וכפל[19]) מרובע[20]) הנמשל[21]) כ' כפלנוהו[22]) על ד' עלו פ' נוסיף עליו מרובע ד' שהוא י"ו יהיו צ"ו והוא דרך אמת[23]) דמיון אחר במעלה הזאת בקשנו לדעת מרבע הקרוב אל נ' מאות ונ' מאות יותר קרובי' אל ד' מאות שהוא מרבע הנמשל במעלה הזאת ממרובע הראשון שהוא ק' והנה נסתכל[24]) המרחק מהמרבע הבא והוא ק' וידענו[25]) כי שרש ד' מאות הוא כ' וכפלו מ' נחלוק[26]) ק' עליו ונתן לו מעט יותר ממה[27]) שנוכל בעבור[28]) היות המספר לפני המרובע והנה אם נתן לו ב' ישאר כ' על כן נתן לו נ' וכאשר נכפול נ' על מ' שהוא כפל השרש יהיו ק"כ נחסר זה המספר מת' יהיו ר"פ נוסיף עליו מרובע נ' שהוא ט' בעבור שהחשבון הוא לפני המרבע הנמשל יהיה רפ"ט והוא המרבע והנה נחסר הנ' מכי [0]שהוא שרש המרובע הנמשל[29]) וישארו[30]) י"ז והוא שרש זה המרובע ובעבור כי יש במרובעו[31]) ט' הנה התבאר[32]) שראוי[29])

[1]) H: לעשות. [2]) H: f. [3]) H noch: הם. [4]) H: הנה. [5]) H: יהיו ק'. הנשאר. [6]) H noch: שעבר. [7]) H noch: לנו. [8]) H: ששים [Rand: שמנים]. [9]) H: שיעלה. [10]) H: ממאתים. [11]) H: ישאר. [12]) H: השרש. [13]) B am Rande ü. H: ובמאזני' אחריי בעבור שהמאזני' ז' נכון להיותו מרובע. [14]) H: המתגלגל. [15]) H: להיותו. [16]) H: השרש. [17]) B: ז'. [18]) H noch am Rande: צ"ו. [19]) H noch: השרש. [20]) H: המרובע; in B übergeschrieben: ב' שרש. [21]) H: שעבר. [22]) H: גכפלהו. [23]) H: האמת. [24]) H: נשתכל. [25]) H: ידענו. [26]) H: ונחלק. [27]) B: מה. [28]) in H doppelt. [29]) H: f. [30]) H: ישארו. [31]) B: ברובעו. [32]) H: נתבאר.

שיהיה[1]) בשרש ז׳ ולא נ׳ כי לא יתכן להיות נ׳ במרובע[2]) °רק אם היה[3]) קרוב אל המרובע[4]) הנמשל שעבר ועל זה הדרך תוכל לדעת במרובע ששם א׳ או ט׳ כפי המרחק מהמרובע[5]) שעבר ומהמרובע[6]) הנמשל העתיד וכזה[7]) תוכל להפריש אם מצאת במרובע ד׳ אם יש בשרש ב׳ או ח׳ וככה אם יש במרובע ו׳ תדע אם ראוי להיות בשרש ד׳ או ו׳ והנה אגלה לך קצת זה הסוד למה היה כך[8]) דע כי °השתים המסיבות[9]) הגדולות אחת הולכת למזרח ואחת הולכת למערב וכח עליון הוא אחד בשתיהם[10]) והנה אחד מרובע אחד[11]) יש במרובע ט׳ אחד וכאשר הוא חשבון ב׳ שני לאחד ככה חשבון ח׳ שני לט׳ אחרונית כי מהלך זה הפך מהלך זה ומרובע ב׳ ד׳ וככה יש במרובע[12]) ח׳ ד׳ וכן דרך נ׳ אל[13]) ד׳ וד׳ עם ו׳ והנה נשאר חשבון ה׳ אמצעי °וע״כ הוא מתגלגל על עצמו[3]) ותוכל[14]) להוציא המרובע הנז׳ על הדרך הראשונה שהזכרתי במרובע קצ״ו שתחסר המרובע שהוא ק׳ מהמספר הנתון שהוא ש׳ יהיה המספר ר׳ וידוע כי שרש ק׳ י׳ וכפלו כ׳ והנה לא נוכל לתת לו י׳ כי לא ישאר מספר שנוכל להסר ממנו מרובע מה שיעלה[15]) בחלוק גם לא נוכל לתת לו ט׳ כי מרובעו גדול ואפי׳ ח׳[16]) כי גם[17]) מרובעו גדול והנה נתן לו ז׳ ונכפול ז׳ על כ׳ °שהוא כפל השרש[3]) יהיו ק״מ נוסיף עליהם הק׳ שהוא המרובע יהיו ר״מ נחבר אליהם מ״ט שהוא מרובע מה שעלה בחלוק יהיו רפ״ט והוא המרובע גם נוסיף שעלה בחלוק על י׳ שהיה[18]) השרש והנה[3]) יהיה שרש זה המרובע י״ז. דמיון במעלה הרביעית בקשנו לדעת המרובע הקרוב אל אלף ור׳ והנה בעבור שהוא מספר זוג נבקש במעלה השנית מספר דומה[19]) לזה והוא י״ב ומרובע שעבר הוא ט׳ וככה ט׳ מאות וכאשר שרש ט׳ ג׳ ככה שרש ט׳ מאות ל׳ וכפלו ס׳ והנה נחסר המרובע שעבר °מן החשבון[20]) הנתון והנה המרחק[21]) ג׳ מאות נחלקם על ס׳ והנה לא נוכל לתת לו ה׳ בעבור מרובע העולה[3]) בחלוק[22]) נתן לו ד׳ נכפול ס׳ על ד׳ יהיו ר״מ נחברם אל המרובע הנמשל שעבר יהיה[23]) אלף וק״מ גם נחבר אליו מרובע מה שעלה בחלוק והוא[24]) י״ו והנה הכל אלף קנ״ו וזהו המרובע הקרוב אל המספר הנתון ובעבור שעלה בחלוק ד׳ נוסיפנו על שרש המרובע הנמשל שעבר שהיה ל׳ יהיה שרש זה המרובע ל״ד והוא אמת בכל המאזנים. דמיון אחר במעלה הזאת נבקש המרבע הקרוב

---

1) H: שיש. 2) In B übergeschrieben. נ׳ בשרש. 3) H: f. 4) H: מרובע. 5) in H doppelt. 6) H: מהמרובע. 7) H: ובזה. 8) H: כן. 9) H: שתי מסיבות. 10) H: בשניהם. 11) H noch: וככה. 12) H: מרובע. 13) H: עם. 14) H: ונוכל. 15) H: שעלה. 16) B: f. 17) H noch: זה. 18) H: שהוא. 19) H: הדומה. 20) H: מחשבון. 21) H noch: הנתון. 22) H: החלוק. 23) H: יהיו. 24) H: והיו.

לו׳ אלפים ת״ק[1]) והנה זה המספר דומה לע״ה כי הוא °מן הזוגות[2]) ובעבור שהוא קרוב אל פ״א יותר מס״ד וידענו כי שרש פ״א ט׳ וככה יהיה שרש ח׳ אלפי׳ וק׳ צ׳ וכפלו ק״פ והנה המרחק ו׳ מאות נתן לו ר׳ אע״פ שאינו שלם בעבור שהחשבון הנתון הוא לפני המרובע הנמשל וכאשר נכפול כפל השרש על ד׳ יעלו תש״כ נחסר זה המספר מהמרובע הנמשל יהיה הנשאר ז׳ אלפים ש״פ[3]) נוסיף עליו מרובע החלוק שהוא י״ו יהיה הכל ז׳ אלפי׳ שצ״ו[4]) ושרשו פ״ו כי נחסר ד׳ וזהו המרובע באמת וגם אם עשינו בדרך[5]) האחרת שהזכרתי בדמיונים שעברו יהיה הדבר שוה. דמיון במעלה החמישית נבקש המרובע הקרוב אל כ״ג אלף והנה זה דומה למעלה הראשונה כי איננו זוג והנה י׳ אלפים כמו אחד וכבר אמרנו מה שהוא במעלה הראשונה אחד[6]) יהיה במעלה החמישית מאה והנה המרובע שעבר י׳ אלפים נחסרנו מהמספר הנתון ישארו י״ג אלף נחלקנו על ר׳ שהוא כפל שרש המרובע הנמשל שעבר והנה נתן לו נ׳ נוסיפנו על השרש שעבר יהיה ק״נ ונשאר לנו עוד ג׳ אלפים נחסר ממנו אלפים ת״ק[7]) שהוא מרובע מה שעלה בחלוק ישארו ת״ק נחלקם על ש׳ שהוא כפל השרש שהיה לנו באחרונה הנה נתן לו אחד ויהיה[8]) המרובע כ״ב אלף ותת״א והשרש קנ״א ת׳[9]) כאשר יכפול[10]) המספר אם יעלה לעשרות חבר עשרות עם עשרות לפי המעלות ואם יש שם אחדים שים במקום האחדים אשר כפלת[11]) ת׳[12]). דמיון אחר במעלה הזאת נבקש המרובע הקרוב אל פ״ה אלפים והנה הוא[6]) קרוב[13]) אל המרובע[14]) הנמשל שהוא צ׳ אלף ושרשו ש׳ והנה המרחק ה׳ אלפים[15]) נחלקנו על כפל השרש שהוא ת״ר ונתן לו ט׳[16]) הקרוב יותר ממה שנוכל והנה יש לו[17]) תוספת ת׳ נחסרם מהמספר הנתון ישארו[18]) פ״ד אלפים[15]) ות״ר ועם[19]) תוספת פ״א שהוא מרובע מה שעלה בחלוק °יהיה פ״ד אלף תרפ״א[6]) °וזה הוא[20]) המרובע באמת °ושרשו רצ״א[6]). דמיון במעלה הששית בקשנו לדעת המרובע הקרוב אל ר׳ אלף ובעבור °שזאת המעלה[21]) מן הזוגות היא דומה לעשרים והמרובע שעבר הוא י״ו וכבר אמרנו כי מה שהוא במעלה השנית אחדים יהיו במעלה הששית מאות והנה השרש ת׳ והמרובע[22]) שעבר ק״ס אלפים[15]) והנה המרחק מ׳ אלף נחלקנו על כפל השרש שהוא ת״ת והנה לא נוכל לתת לו ה׳ בעבור מרובע החלוק נתן לו[6]) ד׳ שהם מ׳ ונכפול זה המספר על ת״ת יעלו ל״ב אלף ונשארו ח׳

1) H: ות״ק. 2) H: מהזוגות. 3) H: וש״ם. 4) H: ושצ״ו. 5) B: f. 6) H: f. 7) H: ות״ק. 8) H: יהיה. 9) auch in H. In M fehlt von ת׳ bis ת׳. 10) H: נכפול. 11) H: כפלו. 12) auch in H. 13) H: הקרוב. 14) H: מרובע. 15) H: אלף. 16) H noch: הוא ט׳. 17) H: לנו. 18) H: נשארו. 19) H: עם. 20) H: וזהו. 21) H: שהמעלה הזאת. 22) H: ומרובע.

אלף[1]) נסיר מהם אלף וו' מאות שהוא מרובע מ' ישארו ד' אלף וד' מאות ועתה יהיה השרש שלנו ת"מ וכפלו תת"פ נחלק המספר הנשאר על זה הכפול והנה נתן לו ז' וישארו[2]) לנו ר"מ נחסר עוד מרובע ז' °נשאר קצ"א נחסר זה המספר מהמספר הנתון[3]) ישארו[4]) קצ"ט אלף ותת"ט וזהו המרובע והשרש תמ"ז. דמיון אחר במעלה הזאת[5]) לדעת מרובע הקרוב אל ו' מאות אלף בעבור °כי המרובע[6]) הנמשל הוא אחרי החשבון נקח המרחק שהוא מ'[7]) כי ו' מאות אלף[3]) הם[8]) כמו ס' וכאשר חלקנום על אלף וו' מאות נתננו לו כל מה שיכולנו ואם יחסר מעט מהאמת חסרנו זה[9]) משרש[10]) המרובע הנמשל שהוא ח' מאות[11]) °ושהם דומים לח'[3]) והנה השרש תשע"ד וכבר היה לנו מ"א אלף ות"ר והיה לנו מ' אלף שהוא המרחק והנה אין לנו לחסר כי אם אלף וו' מאות מהמספר הנתון ויש לנו להוסיף עליו מרובע כ"ו שעלה בחלוק שהוא תרע"ו והנה יצא ת"ר כנגד ת"ר והנה אין[12]) להסר אלא תת"ק כ"ד[13]) כי ע"ו יש לנו[3]) נוספים במרובע החלוק והנה המרובע הוא ת"ק אל"ף וצ"ט אלפים וע"ו וזהו המרובע באמת. דמיון במעלה השביעית בקשנו לדעת המרובע הקרוב אל ה' אלפי אלפים ונאריך לבאר זה הדמיון כהוגן עד שיהיה עקר להוציא המרובעים שהם במעלות אחרות עד אין קץ אע"פ שאין צורך להם בדברי החכמות והנה המעלה הזאת דומה לראשונה[14]) והחשבון המבוקש כמו ה' והנה נסיר המרובע שהוא ד' ישאר לנו אלף אלפים והשרש שלנו שעבר אלפים וכפלו ד' אלפים נחלק עליו המספר הנשאר יעלו ת"ת אלף ונשאר לנו ר' אלף נחסר ממנו מרובע מה שעלה בחלוק שהוא מ' אלף נשאר לנו ק"ס אלף והנה שרש המספר שעבר אלפים ור' וכפלו ד' אלפים ות' נחלק[15]) המספר הנשאר עליו נתן[16]) לו ל' ישאר לנו כ"ה אלף נסיר ממנו מרובע מה שעלה[17]) בחלוק זה[18]) שהוא ל' והם תת"ק נשאר כ"ז אלף וק' והנה השרש שעבר יהיה אלפים ור"ל וכפלו ד' אלפים ות"ס נחלק °עליו המספר הנשאר[19]) יעלו ו' נשאר[20]) לנו ש"ס נחסר ממנו

---

1) H: אלפים. 2) H: וישאר. 3) H: f. 4) H: נשארו. 5) H: זו und noch בקשנו. 6) H: שהמרובע. 7) H noch: אלף. 8) H: הוא. 9) H: ז' [Rand: זה]. 10) H: מהשרש, am Rande noch: של. 11) H hat am unteren Rande hier noch folgendes: פירוש כי ת"ר דומה לס' והנה המרובע הבא ס"ד ושרשו ח' כי ח' על ח' ס"ד וכפל ח' י"ו והם אלף ות"ר וכאשר תחלק המרחק שהם מ' אלף על אלף ות"ר שהוא ? ? ? (3 Worte unleserlich) ותתן לו יותר ממה שנוכל והם כ"ו יש לנו תוספת אלף ות"ד חסרנו מהמספר הנתון אחר שתוסיף מרובע החילוק ויצא המרובע. Das Übrige ist teilweise abgeschnitten, teilweise unleserlich. 12) H noch: לנו. 13) H: וכ"ד. 14) H: לא. 15) H noch: זה. 16) H: ונתן. 17) H: יעלה. 18) H: ד' אלפים ות'. 19) H: המספר הנשאר עליו. 20) H: נשארו.

ל״ו שהוא מרובע ו׳ ישאר ש״ד נחסרנו מהמספר הנתון בראשונה ישאר ד׳ אלפי אלפים ותת״ק אלף וצ״ט אלף ותרצ״ו וזהו המרובע באמת ושרשו אלפים ורל״ו ותבחן זה בכל המאזנים ותמצאנו נכון וככה בדרך כפל השרש °על עצמו[1]) כי כפל אלפים על אלפים יהיו שנים על שנים במעלה השביעית שהם ד׳ אלפי אלפים ונשאר לנו המספר הנז׳ והנה נכפול אלפים במאתים פעמים יהיה ת״ת אלף[2]) ונשארו קצ״ט אלפים גם[3]) תרצ״ו נשוב לכפול אלפים[4]) על ל׳ פעמים יעלו ק״כ אלף נסירם מהמספר הנשאר °ישארו ע״ט אלף וגם תרצ״ו נשוב לכפול אלפים על ו׳ פעמים יעלו כ״ד אלף נסירם מהמספר הנשאר[5]) וישארו[6]) נ״ה אלפים גם[3]) תרצ״ו וכבר כפלנו האלפים על כל המספרים עתה נחל לכפול מאתים על עצמו ועל האחרים שהם אחריו והנה כפלו על עצמו מ׳ אלפים[7]) חסרנום מהמספר[8]) הנשאר ישארו ט״ו אלפים[7]) תרצ״ו[9]) גם נכפול ר׳ על ל׳ פעמ׳ יעלו י״ב אלף נחסרנו מהמספר הנשאר ישארו[10]) ג׳ אלפים תרצ״ו[9]) ועוד נכפול ר׳ על ו׳ פעמ׳ יעלו אלפים ות׳[11]) נסירם מהמספר הנשאר ישארו אלף ורצ״ו וכבר השלמנו לכפול ר׳ על כל[4]) המספרים שהם אחריו °נחל מן ל׳[12]) והנה כפלו על עצמו תת״ק נחסרנו מהמספר הנשאר ישארו[13]) שצ״ו נכפול עוד ל׳[4]) על ו׳ פעמים יהיו ש״ס ונשארו ל״ו שהוא מרובע ו׳ והנה החשבון נכון. וקודם[14]) שאדבר על המספרים שאין להם שרש אראה לך דרך[15]) איך תוכל לדעת[16]) מרובעים רבים ממרובע אחד גם שרשים רבים משרש אחד ודע כי כפל מרובע על מרובע לעולם יהיה מרובע והשורש יהיה כמו העולה מכפל שרש אחד מהמרובעים על שרש מרובע האחר[17]). דמיון כפלנו מרובע ה׳ על מרובע ט׳ ועלה אלפים וכ״ה וזה החשבון מרובע בקשנו לדעת כמה שרשו[18]) כפלנו ה׳ על ט׳ ועלו מ״ה והוא השרש באמת וערך מרובע אל מרובע גם הוא מרובע ואם חלקת °הגדול על הקטן[19]) תמצא שרשו. ת׳[20]) השרש הקטן אל הגדול הוא שרשו. ת׳.[21]) דמיון מה ערך מ״ט אל ק׳ הנה הוא כפלו וב׳ שביעיות שביעית בקשנו לדעת שרש זה המרובע חלקנו י׳ על ד׳ עלה אחד וג׳ שביעיות וזהו השרש כי אחד על אחד[22]) אחד וכפל אחד על ג׳ שביעיות פעמי׳[23]) ו׳ שביעיות וכפל ג׳ שביעיות על ג׳ שביעיות ט׳ שביעיות שביעית

---

[1]) H: בעצמו. [2]) H: אלפים. [3]) H: וגם. [4]) H: f. [5]) B: f. [6]) H: ישארו. [7]) H: אלף. [8]) H: מן המספר. [9]) H: ותרצ״ו. [10]) H: ישאר. [11]) B: וד׳. [12]) B: בחלוק הל׳. [13]) H: יהיה. [14]) In B übergeschrieben ואחר; H: ואחר durchgestrichen und וקודם übergeschrieben; in M: (!) וקודם ואחר. [15]) H: f. [16]) H: להוציא. [17]) B: האחד. [18]) B: שרש. [19]) H: הקטן אל הגדול. [20]) auch in H; in M fehlt von ת׳ bis ת׳. [21]) auch in H. [22]) H noch: הוא. [23]) H noch: הם.

והנה נעשה מן הז׳ שביעיות שביעית אחת ונחברנה[1]) אל הו׳ שביעיות שהיו לנו יעלו אחד שלם[2]) והנה יש לנו שנים שלמים וב׳ שביעיות שביעית בקשנו לדעת מרובע מספר ידוע ממרובע ידוע למספר ידוע חלקנו המספר הידוע הגדול על מספר הידוע הקטן שידעני מרובעו[3]) ונקח מרובעו וגכפלנו על המרובע הידוע והעולה הוא מרובע המספר[4]) הגדול שידענו. דמיון בקשנו לדעת מרובע י״ט ממרובע ז׳ שהוא מ״ט חלקנו י״ט על ז׳ עלו[5]) ב׳ וה׳ שביעיות כפלנו[6]) מרובע זה והנה ב׳ על ב׳ ד׳ שלמי׳ וב׳ על ה׳ שביעיות פעמי׳ הם כ׳[7]) שביעי׳ וה׳ על ה׳ הם כ״ה שביעיות שביעית[2]) נעשה מהם ג׳ שביעיות[2]) נשאר לנו ד׳ שביעיות שביעית[2]) נחבר הג׳ שביעיות שהיו לנו על הכ׳ יהיו כ״ג נעשה מהם ג׳[8]) שלמים והנה המרובע ז׳ שלמים וב׳ שביעיות וד׳ שביעיות שביעית והנה נכפול מ״ט על ז׳ יעלו שמ״ג נחבר אליהם י״ד שהם ב׳ שביעיות מ״ט יהיו שנ״ז גם נחבר אליהם ד׳ שביעיות שביעית שהם ד׳ ממ״ט[9]) יהיה הכל שס״א וזהו מרובע י״ט ואם חברנו ב׳ מרובעים בין שיהיו על הסדר או שיהיו מרוחקי׳ זה מזה נכפול המחובר ונחסר מזה הכפל מרובע היתרון שיש בין שני המספרים שהם השרשים יהיה הנשאר לעולם מרובע והמחובר מהב׳[10]) שרשים הוא השרש. דמיון חברנו פ״א שהוא מרובע ט׳ עם תשכ״ט שהוא מרובע כ״ז יהיו תת״י וכפלו אלף ותר״כ וידענו[11]) כי שרש המרובע הקטן ט׳ ושרש המרובע הגדול כ״ז והיתרון ביניהם י״ח ומרובעו שכ״ד הסרנו[12]) מהכפול נשאר[13]) אלף ורצ״ו והוא מרובע ושרשו ל״ו שהוא מחובר[14]) מט׳ עם כ״ז ואם חברנו ג׳ מרובעי׳ ונכפלם ג׳ פעמים ונחסר מהעולה באחרונה מרובעי[15]) הג׳ יתרונים שיש בין שרשי הג׳ מספרים והעולה באחרונה יהיה גם הנשאר מרובע וכאשר תחבר הג׳ שרשים יהיה המחובר שרש הנשאר. דמיון חברנו ל״ו שהוא מרובע ו׳ עם ס״ד שהוא מרובע ח׳ ועם ד׳ מאות שהוא מרובע כ׳ והנה המחובר [0]מג׳ מרובעי׳[16]) הוא[17]) ת״ק כפלנוהו ג׳ פעמים עלו[18]) אלף ות״ק שמרנו זה החשבון נשוב לחפש היתרוני׳ והנה היתרון בין הו׳[19]) ובין הח׳[20]) ב׳ ומרובעו ד׳ והיתרון בין הו׳[19]) ובין הכ׳[21]) י״ד ומרובעו קצ״ו היתרון בין הח׳[20]) ובין הכ׳[21]) י״ב ומרובעו קמ״ד והנה מרובעי[15]) אלה הג׳ הם[17]) שמ״ד נחסרם מהכפול השמור ישארו אלף וקנ״ו והוא המרובע[22]) והמחובר מן הג׳ שרשים הוא[17]) ל״ד והוא שרש מרובע הנשאר ועל זה הדרך אם חברת ד׳ מספרים [0]או ה׳[17]) ותכפלם[23]) כך[24]) פעמי׳[25]) והכלל שהכפול[26]) כפי מספר

1) H: ונחברם. 2) H: f. 3) H noch: ונקח העולה בחלוק ונכפלנו. 4) H: כמספר. 5) H: עלה. 6) H: בקשנו. 7) H: 0ב. 8) H noch: שביעיות. 9) H: ממש (!). 10) H: מן ב׳ 11) H: ובעבור שידענו. 12) H: נחסרנו. 13) H: נשארו. 14) H: המחובר. 15) H: מרובעים. 16) H: מהג׳ מספרים. 17) H: f. 18) H: עלה. 19) H: ו׳. 20) H: ח׳. 21) H: כ׳. 22) H [illegible]: המבוקש. 23) H: וכפלתם. 24) H: ד׳. 25) H noch: או ה׳ מספרים וכפלתם. 26) [illegible] שתכפול und noch יהיה.

המרובעי׳ שחברת ותחסר לעולם מרובעי היתרוני׳ כמה שיהיו[1]) מהמחובר יהיה[2]) הנשאר מרובע ויש לך להשמר לדעת היתרונים ואומר לך כלל שתוכל לדעת ממנו כמה מספר היתרונים חסר לעולם אחד ממספר[3]) המרובעי׳[4]) ודע כמה מספר המחובר שלפני אותו המספר כאשר הראיתיך[5]) וכמספר המחובר יהיה[6]) המספר[7]) היתרונים. דמיון חברנו ו׳ מרובעי׳ ונרצה לדעת מספרי היתרוני׳ נחסר אחד כאשר דברנו ישארו[8]) ה׳ והמספרי׳ שהם לפניו יהיו ט״ו וככה יהיו מספרי היתרוני׳. עתה נחל לדבר על הנשברי׳ המרובעי׳ שיש להם שרש אמת ונאמ׳ דבר כולל לנשברי׳ המרובעי׳ שהם לבדם או שהם עם שלמי׳ הסתכל[9]) אם היה הנשבר חצי או שלישית או חמישית או ששית [0]או שביעית[7]) או שמינית אינו מרובע והיה כן בעבור כי[7]) אלה המספרי׳ בשלמי׳ אינם מרובעי׳ רק אם היה[10]) בו רביעית או חמישית חמישית[11]) או ששית ששית[12]) או שביעית שביעית[13]) או שמינית שמינית[14]) או חצי שמינית כי הוא חלק מי״ו והנה[7]) הסתכל[15]) אם היה במרובע רביעית דע כי בשרש חצי ואם[16]) שם תשיעית דע כי יש בשרש שלישית ואם יש שם חצי שמינית דע כי יש בשרש רביעית ונחל לדבר על המרובעי׳ נשברי׳[17]) לבדם[7]) שאין עמהם שלמי׳ וכבר אמרנו כי הנשברי׳ הפך השלמי׳ וכאשר תכפול חשבון שלם על חשבון שלם בין יהיה[18]) על עצמו או על אחר יהיה העולה גדול מהמספרי׳[19]) והפך זה בנשברי׳[17]) וכאשר המרובעי׳ השלמי׳[20]) גדולי׳ משרשיהם יהיו המרובעי׳ הנשברי׳ להפך כי[7]) שרשיהם גדולים ממרובעיהם ולהוציא המרובעי׳ משרשיהם דבר קל כי כפל חצי על חצי הוא[10]) רביעית[21]) אחד והוא המרובע וככה שלישית על שלישית תשיעית אחת וב׳ שלישיות על ב׳ שלישיות שלישית אחת ושלישית שלישית שהוא תשיעית וד׳ חומשי׳ על ד׳ חומשי׳[22]) נ׳[23]) חומשים וחומש החומש [0]והוא המרובע[7]) ועל[24]) זה הדרך הכל רק הקשה להוציא השרש מהמרובע ואתן לך דרך כוללת על דרך חכמי המזלות שיוציאו כל חשבונם מחשבון ס׳ אם ישאל אדם כמה הם ב׳ שלישיות כפולות על ב׳ שלישיות תכפול מ׳ על מ׳ יהיו אלף ות״ר חלקם על ס׳ יהיו כ״ו חלקי׳ ראשוני׳ ונשארו מ׳ שניים והכל ד׳ תשיעיות כי תשיעית ס׳ ו׳ ראשוני׳ גם[7]) מ׳[25]) שניים שהם[26]) שתי שלישיות ראשון ואם עשינו מזה המספר[27]) שלישיות יהיו כ׳ גם נכפול ס׳

---

1) H: שיהיה. 2) H: ויהיה. 3) H: מהמספר. 4) H: המחוברים. 5) H noch am Rande: כגון מי שרוצה לדעת המרובעים מא׳ עד ו׳. Statt המרובעים soll es wohl heissen המחוברים. 6) H: יהיו. 7) H: f. 8) H: ישאר. 9) H: השתכל. 10) H: יהיה. 11) H: החמישית. 12) H: הששית. 13) H: השביעית. 14) H: השמינית. 15) H: והשתכל. 16) H noch: יש. 17) H: הנשברים. 18) H: שיהיה. 19) H: מהמספר. 20) H: שלמים. 21) H: רביע. 22) H noch: יהיו המרובעים. 23) B, H: ד׳. 24) H: על. 25) H: ומ׳. 26) B am Rande: ס״א כי ד׳ תשיעיות ס׳ כ״ו ראשונים ומ׳ שניים שהם. 27) H noch am Rande: ר״ל מהר׳ ראשונים ומ׳ שניים יהיו כ׳ שלישיות.

על ג׳ יהיו ק״פ והכל יהיו ממתכונת אחת וכאשר נחלק זה המספר על כ׳ עלו ט׳ שהוא תשיעית אחת ואם הפך השואל[1]) השאלה ואמר כי המרובע ד׳ תשיעיות אחד כמה השרש הפוך גם אתה °הדבר שתדע[2]) כמה הם[3]) ד׳ תשיעיות ס׳ וכבר אמרנו שהם כ״ז ראשוני׳ וג׳ שניי׳ עשה מן הראשוני׳ שניי׳ וישים השניי׳ עמהם יהיו הכל אלף ת״ר[4]) וזה המספר בזוגות דומה לי״ו וחשוב שהם שלמי׳ והנה השרש מ׳ שוב[5]) וחשוב כי הם ראשוני׳ וככה הוא השרש. דמיון בחשבון שלא יתחלק על ס כפלנו ד׳ שביעיות על ד׳ שביעיות והוא[6]) על דרך חכמי החשבון נכפול ד׳ על ד׳ יהיו י״ו נחלקם על ז׳ יהיו ב׳ שביעיות וב׳ שביעית ועל דרך הדומה לחכמי המזלות יהיו חלקיו[7]) ע׳ והנה °ד׳ שביעיות הם[8]) מ׳ נכפול מ׳ על מ׳ יהיו אלף ות״ר נחלקם על ע׳ יהיו[9]) כ״ב ראשוני׳ גם ס׳ שניים והוא המרובע ואם השואל יהפוך השאלה ויאמר כמה שרש זה המרובע שהוא ככה גם אנחנו[10]) נהפוך הכ״ב ראשוני׳ ונעשה מהם שניי׳ ונוסיף עליהם הס׳ שניים שהיו לנו יהיו אלף ות״ר נחשוב כי הם שלמי׳ ושרשם מ׳ ונחשוב כי הם ראשוני׳ וזהו השרש באמת ואם רצינו להשיב ממתכונת ע׳ אל מתכונת[11]) ס׳ נכפול מ׳ על ס׳ ונחלק העולה על ע׳ יעלו ל״ד וישארו[12]) כ׳[13]) נכפלם[14]) פעם אחרת על ס׳ ונחלק העולה על ע׳ יעלו[15]) י״ז וישאר לנו[16]) [זה[17]) שאמר שהוא אחד הוא עשרה לכן החשבון אינו מדקדק] נעשה ממנו ס׳ ובעבור כי ע׳ גדול מס׳ נכפלנו[18]) עוד ויהיו ג׳ אלפים ות״ר נחלקם על ע׳ עלו[19]) נ״א[20]) ויספוק[21]) לנו זה. דמיון אחר כפלנו שלישית על שלישית עלה[22]) תשיעית אחד והוא המרובע[23]) ונעשה חלקיו[24]) צ׳ ושלישיתו ל׳ °כפלנו אותו[25]) על עצמו עלו[22]) תת״ק נחלקנו על צ׳ ועלה י׳ חלקים והוא המרובע והפך זה בקשנו לדעת השרש מזה המרובע עשינו מהי׳ חלקים שניים והם תת״ק חשבנו שהם שלמי׳ וכמספר[26]) הזה יהיו[27]) ראשוני׳ והוא השרש וכל זה נכון אם יש מרובע[28])

---

1) H noch: את. 2) H: שתדע הדבר. 3) H: f. 4) H: ות״ר. 5) Von שוב bis השרש fehlt in H. 6) H: והנה. 7) H: חלקינו. 8) H: הם ד׳ שביעיות. 9) H: עלו. 10) H: אנו. 11) H: מתכנת. 12) H: וישאר. 13) H: ב׳. 14) Von נכפלם bis מדקדק fehlt in H. 15) In B ist hier von ל״ד bis יעלו irrtümlich wiederholt. 16) Hier fehlt אחד. 17) Die Worte von זה bis מדקדק bilden eine Randbemerkung, die in B irrtümlich in den Text aufgenommen ist (vgl. Übersetzung S. 78 oben u. Anmerk. 146 dazu). 18) H: נכפלם. 19) H: יעלו. 20) H: כ״א. 21) H: ויספיק. 22) H: ועלה. 23) H: מרובע. 24) B: חלק מ׳. 25) H: כפלנוהו. 26) H: ובמספר. 27) H: הם. 28) B am Rande: ס״א מרובע ושרש אמת; H: wie diese ס״א; M: wie im Texte in B.

אמת ושרש אמת רק אם אמר חשבון חלקים שאין להם[1]) שרש אמת בין שיהיה להם ערך אל ס׳ או לא יהיה כי אם אמר י״ב חלקים הוא המרובע כמה השרש ידענו כי י״ב הוא חמישית ס׳ וכבר אמרנו כי לא יתכן להיות[2]) במרובע חמישית וככה אם אמר כי המרובע י׳ חלקים שהוא ששית אחת[3]) לא יתכן להיות רק אם אמר כי המרובע חלק אחד ומ׳ שניים שהוא ששית הששית הוא הנכון והנה במספר שיש לו ערך אל ס׳ לא יתכן להיות רובי המספרים מרובעים אף כי המספרים שאין להם ערך כלל כמו י״א י״ג .(ט״ו) י״ז י״ט ואחרים רבים שאין[4]) להם ערך ועוד אתן לך דרך[5]) שתוכל להוציא לכל[6]) מרבע נשבר[7]) שרשו בדרך שהיא קרובה אל האמת. ועתה אדבר על השלמים שיש בהם[8]) נשברים והם[9]) מרובעים. דמיון אמר אומר מרובע שהוא י״א ותשיעית כמה השרש אחר שאמר שיש בו תשיעית נכון הוא להיותו מרובע ובשרשו שלישית [0]נכח התשיעית[10]) חסר[11]) ממנו[10]) התשיעית שהוא מרובע שבר השבר נשארו [0]י״א שלמים[12]) והנה המרחק מהמרובע[13]) שעבר ב׳ שלמים נשיבם ראשונים יהיו ק״כ נחלקם על כפל השרש שעבר שהוא ו׳ יהיו כ׳[14]) והנה השרש ג׳ שלמים וכ׳ חלקים ושליש. דמיון אחר המרובע שהוא[15]) ז׳ שלמים ונ׳ חלקים ראשונים[10]) וכ״ד שניים הנה[10]) בעבור[16]) ששם[17]) כ״ד שניים ידענו שיש[18]) בחשבון חומש החומש שהוא ב׳ חלקים וכ״ד שניים נחסר זה מרובע השבר מהמספר הנתון ישאר[19]) ז׳ שלמים ומ״ח ראשונים[20]) והנה המרחק מהמרובע שהוא אחריו אחד שלם וי״ב הלקים שהם ע״ב ראשונים נחלקם על כפל השרש שהוא אחריו [0]והוא ו׳[10]) ויעלו י״ב נגרעם מנ׳ שהוא[15]) השרש ישארו ב׳ שלמים ומ״ח חלקים והנה נבחן זה בכפל כי הנה[10]) ב׳ על ב׳ ד׳ שלמים וידענו כי ב׳ על מ״ח פעמים יהיו[21]) קצ״ב ומ״ח[22]) הם ד׳ חמישיות יהיו י״ו חמישיות נעשה מהם[23]) ג׳ שלמים וישאר[24]) חמישית[25]) אחת וישארו[26]) לנו לכפול[27]) ד׳ חמישיות על ד׳ חמישיות יהיו י״ו חמשיות[28]) חמישית נעשה מט״ו ג׳ חומשין[29]) ונחבר אליהם החומש שהיה לנו יהיו ד׳ חומשין[29]) גם[10]) חומש[30]) החומש[31]) והנה[32]) ד׳ חומשין הם מ״ח ראשונים וחומש החומש

---

1) H: בהם. 2) H: f. 3) H: אחד. 4) H: אין. 5) H noch: בלל. 6) H: כל. 7) H: בשבר. 8) H: להם. 9) H: f. 10) H: f. 11) H: נסיר. 12) H: שלמים י״א. 13) H: בין המרובע. 14) H: ב׳. 15) H: שהם. 16) H: ובעבור. 17) H: כי שם. 18) H: כי יש. 19) H: ישארו. 20) H: שניים. 21) H: יעלו. 22) Statt der Worte ומ״ח bis י״ו חמישיות hat H so: שהם י״ו חמישיות כי החמישית הוא י״ב. 23) H: מהט״ו חמישיות. 24) H: ישאר. 25) B: חומשית. 26) H: ויש. 27) H noch: עוד. 28) H: חמישיות. 29) H: חומשים. 30) H: וחומש. 31) H noch: שהוא. 32) Von והנה bis החומש fehlt in H.

ב׳[1]) ראשונים וכ״ד[2]) שניים[3]) והנה הכל[0] ג׳ ראשונים וכ״ד שניים וז׳ שלמים[4]). דמיון מרובע שהוא מ״ד וד׳ תשיעיות ידענו[5]) כי התשיעיות מן השלישיות יצאו[6]) והנה נסיר זה המרובע שהוא לשברי שברים ונבקש כמה מרחק השלמים מן המרובע שעבר והנה ח׳ נשיבם[7]) ראשונים יהיו ת״פ נחלקם על י״ב שהוא כפל שרש המרובע שעבר יהיו מ׳ חלקים[8]) ראשונים והנה השרש ו׳ שלמים ומ׳ חלקים כי מ׳ הם השברים ומ׳ מס׳ הם ב׳ שלישיות והנה נכפול ב׳ על ב׳ יהיו ד׳ נחלקם על ג׳[9]) יעלה[10]) שלישית[11]) אחת ונשאר שלישית השלישית[12]) והנה הם ד׳ תשיעיות ובדרך חכמי המזלות נכפול ו׳ על ו׳ והם[13]) ל״ו ונכפול ו׳ על מ׳ ומ׳ על ו׳ והם ת״פ ראשונים נחלקם על ס׳ ועלו[14]) ח׳ שלמים נחברם עם הל״ו ויהיו מ״ד נכפול מ׳ על עצמו ונחלק העולה על ס׳ ומה שישאר הם שניים והם כ״ו[15]) ומ׳[16]) והם ד׳[17]) תשיעיות כי ערכם אל ס׳ כערך ד׳ אל ט׳. ואחר שהזכרתי אלה הדמיונים תעשה כדרך הזה בכל המעלות ועתה אומר לך דרך[8]) כלל לכל המספרים שיש להם שרש אמת או אין להם דע כי לעולם יהיה בין ב׳[8]) מספרים[18]) שהם על הסדר כמספר[19]) השנים[20]) שרשים והנה הסתכל[21]) במספר[22]) שתרצה כמה[23]) מרחקו[0] מהמרבע שעבר[24]) אם היה[25]) המרחק בין מספרך ובין המרובע שעבר כשרש המרובע שעבר הוא מספר האמצעי וכל מספר שיהיה[26]) פחות מהאמצעי הוציאהו מהמספר המרובע שעבר ואם היה יותר מהשרש שעבר הוציאהו אחורנית מהמרובע שלפניו[27]). דמיון המספר עשרים והנה מרחקו מן המרובע שעבר ד׳ ואם תשיבם ראשונים ותחלקם[28]) על ח׳ שהוא כפל השרש יהיו ל׳ שהוא חצי ס׳ ואם לקחנו מרחק הכ׳ מהמרובע הבא יהיה[29]) כמספר השרש נשיבם ראשונים ונחלקם על י׳ שהוא כפל השרש יהיו ל׳ על כן אמרתי כי[30]) כי הוא חשבון אמצעי ועתה שים לבך אם היה מספרך קרוב אל המרובע שעבר ראה המרחק שיש ביניהם ועשה ממנו ראשונים ואם יש בחשבונך[31]) ראשונים הוסיפם על הראשונים שעשית ואם יש עמך שניים השב הכל במערכת השניים או קח דרך קצרה אם היו השנים פחותים מל׳ הניחם ואם יותר הוסף ראשון אחד עליהם וכאשר תדע כמה[32]) הראשונים של המרחק חלקם על כפל השרש

1) H noch: שלמים. 2) H noch: חלקים. 3) H noch: ושבעה שלמים. 4) H: ז׳ שלמים וג׳ חלקים וכ״ד שניים. 5) H: וידענו. 6) H: באו. 7) H: נשיב אותם. 8) H: f. 9) H: הג׳. 10) H: עלה. 11) H: השלישית. 12) H: השליש. 13) H: הם. 14) H: עלו. 15) H noch: שלמים. 16) H noch: חלקים. 17) H: הד׳. 18) H: המספרים. 19) M: במספר; B: משפט. 20) M noch: שהם, B am Rande: ס״א במספר הם שרשים. 21) H: השתכל. 22) B: המספר. 23) H noch am Rande: לדעת כמת. 24) H: שעבר מהמרבע. 25) H: יהיה. 26) H: שהוא. 27) B im Texte: שעבר, übergschrieben: נ׳ הבא. 28) H: ותחלק אותם. 29) H noch: ה׳. 30) H noch: חשבון. 31) H: מחשבונך. 32) H noch: הם.

שעבר וההוה[1]) הוסיפנו על השרש שעבר והמחובר יקרא שרש ראשון ואם חשבונך היה במאות ואלפים[2]) זה השרש יספיק לך[3]) במדות כי לא יזיק רק אם המספר היה קטן או. ך לשרש שני שהוא יותר מדוייק[4]) ולהוציא היתרים והקשתות אתה צריך לשרש שלישי שמדוייק[5]) יותר וככה יהיה הדקדוק כשיהיו לך הראשונים[6]) של המרחק[7]) דע[8]) כמה מרובעם וחלקהו על כפל השרש הראשון ודע העולה כמה הם ובאיזה[9]) מעלה הם בראשונים[10]) או בשניים[11]) כאשר הראיתיך בשער השברים וההוה[1]) חסרהו מן השרש הראשון והנשאר הוא השרש השני[12]) ואם תרצה [0]לדקדקו עוד[13]) קח מרובע זה שעלה בחלוק וחלקהו על כפל השרש[3]) השני ועתה אתן לך דמיון[14]) על דרך חכמי החשבון בדרך קרוב[15]) בקשנו לדעת שרש מאתים והנה המרובע שעבר קצ״ו והמרחק ד׳ שלמים כְשתחלקם[16]) על כ״ח שהוא כפל השרש תעלה[17]) שביעית אחת[18]) [0]והנה השרש י״ד ושביעית אחת[3]) ואם רצית לדעת שרש עשרים אלף כפול זה השרש על י׳ יעלה קמ״א ונ׳ שביעיות[19]) ואם בקשנו לדעת כמה שרש שנים משרש מאתים שהוא י״ד ושביעית נקח עשיריתו והנה מי׳ נקח[20]) אחד שלם [0]ועשירית ד׳[21]) והם[22]) [0]ד׳ עשיריות[23]) [0]וידענו כי[24]) ד׳ עשיריות הם ב׳ חמישיות שהם כ״ד ראשונים ויש לנו לקחת עשירית השביעית והנה שביעית ס׳ כבר אמרנו שהוא ח׳[25]) ל״ד[26]) שניים נשיב הכל שניים יהיו תקי״ד ועשיריתם נ״ב והנה יהיה השרש הראשון א׳[27]) כ״ד נ״ב והוא כמעט[28]) קרוב אל האמת נשוב להוציא זה השרש מכ׳ אלף וידענו כי זה החשבון הוא[23]) דומה לאחרים וי׳ אלפים כמו אחד והוא המרובע הנמשל והנה נחסר י׳

---

1) H: וההווה. 2) H: ובאלפים. 3) H: f. 4) H: מדוקדק. 5) H: שהוא מדוקדק. 6) H: ראשונים. 7) H: מרחק. 8) Von דע bis הראשון fehlt in M; dafür steht dort noch folgendes: הפירוש שתקח הראשונים של המרחק אחר שלקחת אותם על כפל השרש שעבר והם הראשונים אשר עלו לך בשרש הראשון ע״כ. 9) H: ובאי זו. 10) H: הראשונים. 11) H: השניים. 12) M noch: או אם תרצה אמור שתקח השרש הראשון ותרבעהו ותראה כמה יהיה הקרוב והתוספת אשר בו על מספרך הראשון והתוספת ההוא תחלק על כפל השרש הראשון והיוצא בחלוקה תחסר מהשרש הראשון והנשאר הוא השורש השני ת״ו (=תוֹסֶפֶת?) 13) H: לדקדקו עוד. 14) B: übergeschrieben דמיונים; M: דמיונים. 15) H: קרובה. 16) H: כשתחלק אותם 17) H: יעלה. 18) H: אחר. 19) In M folgen hier noch Einschiebsel über Bruchrechnung, unter anderm findet man hier die Aufgabe von hebr. S. 35 Z. 14—23 fast wörtlich wiederholt. 20) H: תקח. 21) in H durchgestrichen. 22) H: הם, aber durchgestrichen. 23) H: f. 24) in H am Rande. 25) H noch: שלמים. 26) H: ול״ד und noch חלקים. 27) B am Rande: ס״א א׳ שלם ראשונים וכ״ד שניים ונ״ב שלישיים; H: wie diese ס״א. 28) H: וכמעט הוא.

אלפים[1]) ממספרנו ישארו[2]) י׳[3]) אלפים[1]) נחלקם על כפל השרש שהוא ר׳[4]) ולא נתן לו כל מה שנוכל אך נניח כפי מרובע החלוק והנה נתן לו[5]) מ׳ וישארו לנו אלפים נסיר מהם אלף ות״ר שהוא מרובע החלוק נשאר ת׳ והשרש שלנו ק״מ וכפלו ר״פ נחלק הנשאר עליו[6]) [0]נתן לו[5]) אחד נשארו ק״ב נהסר ממנו[5]) א׳ שהוא מרובע א׳ נשאר ק״ט והשרש שלנו קמ״א נעשה מהנשארים ראשונים יהיו ז׳ אלף[7]) וק״מ נחלקם על רפ״ב שהוא כפל השרש שלנו עלו כ״ה חלקים ראשונים וי״ט שניים נחלק כל מה שאמרנו מן השלמים והשניים על ק׳ יהיה העולה אחד[8]) שלם כ״ד נ״א י״א וזהו מדוקדק יותר[5]) מן הראשון שהזכרנו ואם[9]) תקח כל חשבון שהוא כפל מרובע ותכפול שרש המרובע על זה השרש יצא לך שרש החשבון מדוקדק. **דמיון** רצינו לדעת כמה שרש י״ח והנה[10]) כפלנו שרש המרובע שזה המספר כפלו ועלה ד׳ שלמים י״ד[11]) ראשונים ל״ג שניים ל״ג[12]) שלישיים ואם כפלנו זה המספר יהיה שרש[13]) ע״ב שהוא כפל כפל[14]) י״ח ואם לקחנו חצי זה שרש יהיה שרש ד׳ וחצי שהוא רביעית י״ח ואם[15]) נקח מרובע ז׳ אלפים ור׳ שהוא כפל מרובע ס׳ יהיה השרש פ״ד שלמים נ״א ראשונים י״א שניים וזהו שרש שנים[16]) בעצמו כי השיבונום בדרך[17]) ראשונים והנה חשוב אלה פ״ד שהיו שלמים חשבם ראשונים[18]) והראשונים שניים והשניים שלישיים ואם תכפול זה[19]) המספר על עצמו אחר שתשיבם[20]) שלישיים ותחלקם כמשפט שתשיבם אל [0]המעלה הראשונה[21]) לא ישאר לך שני אחד ואף כי ראשון נשוב להוציא שרש שנים[16]) להיותו דמיון לאחדים הנה המרובע שעבר הוא אחד והמרחק בין חשבוננו ובינו הוא אחד נשיבנו ראשונים יהיו ס׳ נחלקם על כפל השרש שהוא שנים[16]) יהיו ל׳ ראשונים והנה[22]) השרש הראשון א׳[19]) ול׳ ראשונים[23]) ואינו נכון בעבור שהוא בחשבון קטן כי הנה כאשר הוציאנו אותו מחשבון ר׳ היה קרוב אל האמת ומהחשבון כ׳ אלף יותר מדוקדק ויספיק לנו השרש הראשון והנה עלה לנו בחלוק ל׳ חלקים ראשונים ומרובעו ט״ו ראשונים כי כפל ראשונים[24]) [0]על ראשונים[19]) שניים והם ט׳ מאות נחלקם

---

1) H: אלף. 2) H: וישאר. 3) H: ו׳. 4) H: ד׳. 5) H: f. 6) H noch: למי (?). 7) H: אלפים. 8) B am Rande: ס״א א׳ שלם כ״ד שניים נ״א שלישיים י״א רביעיים; H: wie diese ס״א, nur או(!) statt י״א. 9) B, H: ואם תכפול כל חשבון שהוא כפל המרובע על זה השרש יצא לך שרש החשבון מדוקדק, B am Rande wie oben. 10) H: הנה. 11) H: וי״ד. 12) M 43 im Zusatz: ל״ב. 13) B: שרשו, übergeschrieben שרש. 14) M 43 im Zusatz: f. 15) H: והנה, in B übergeschrieben; Comm. B: ואם, ebenso M 43 im Zusatz. 16) H: שניים. 17) H: כדרך. 18) H noch am Rande: ועלה א׳ כ״ד. 19) H: f. 20) H: שתשיב. 21) B: המעלות הראשון. 22) H: והוא. 23) H: שניים. 24) H: הראשונים.

על ס׳ יהיו ט״ו ראשונים נחלקם על כפל השרש שהיה לנו שהוא נ׳ יעלו ה׳ נחסרם מן השרש שהיה לנו יהיה השרש השני א׳ שלם וכ״ה[1]) ראשונים ועודנו אינו מדוקדק בעבור יותר חשבון קטן נשוב ונקח[2]) מרובע החלוק שהוא[3]) כ״ה והם[4]) שניים והשרש השני שהיה לנו שהיה[5]) אחד שלם וכ״ה[1]) ראשונים יהיה כפלו ב׳ שלמים נ׳ ראשונים נחלק השניים על זה ובעבור שיש לנו[5]) ה׳ ששיות נשיב הכל מערך ו׳ והנה נכפול כ״ה על ו׳ יהיו ק״נ נחלקם[6]) על י״ז נתן לו ח׳ ונשארו[7]) י״ד נשיבם ממערכת ס׳ יהיו תת״מ נחלקם על י״ז עלו מ״ט והם שלישיים ונשארו ז׳[8]) מי״ז[9]) נשליכם כי אין צורך אליהם [0]כי יש[10]) לנו עוד[8]) לחסר מרובע שעלה בחלוק עתה[11]) והנה כאשר נחסר [0]ח׳ שניים[12]) גם[8]) מ״ט[13]) שלישיים מהשרש[14]) השני יהיה הנשאר אחד שלם כ״ד ראשונים[15]) נ״א שניים[16]) י״א שלישיים[17]) ואילו עשינו על דרך חכמי המזלות יהיה הדבר שוה ואם היינו מדקדקים עוד מדרך מרובע ח׳ שניים מ״ט שלישיים שאמרנו[8]) היה יוצא השרש מדוייק שאין דיוק[8]) כמוהו[18]) א׳ כ״ד ראשונים[15]) נ״א שניים[16]) י״ז[19]) שלישיים[17]) נ״ד[20]) רביעיים[21]) בקשנו להוציא שרש י׳ והנה המרחק מהמרובע[22]) שעבר אחד נשיבנו ראשונים[23]) יהיו[24]) ס׳ נחלקנו על ו׳ שהוא כפל השרש שעבר[8]) יהיה י׳ והנה השרש הראשון ג׳ שלמים י׳ ראשונים נשיב לדקדקו והנה נקח הק׳ שהוא מרובע החלוק ונחלקנו על ו׳ ושלישית שהוא כפל השרש הראשון ונשיב הכל[25]) מערך ג׳ ויש[26]) לנו לחלק ש׳ על י״ט ועלו ט״ו ונשארו ה׳ והנה אלה הה׳ נשיבם שלישיים[15]) מערך ס׳ יהיו ש׳ נחלקם על י״ט עלו ט״ו והנה[8]) יש[27]) לנו להסר זה מי׳ חלקים שהיה לנו הנה נחסר ט״ו שניים גם[28]) ט״ו שלישיים יהיה[29]) הנשאר ט׳ ראשונים[30]) מ״ד[31]) [0]שניים מ״ה שלישיים[32]) והנה[8]) השרש[33]) השני הוא[8]) ג׳ שלמים [0]ט׳ ראשונים[8]) מ״ד שניים מ״ה[34]) שלישיים[35]) ואם נדקדקנו יותר[8]) יהיה ג׳ שלמים ט׳ ראשונים מ״ד שניים י״ב שלישיים וכשנכפול זה החשבון על י׳ יהיה העולה ל״א שלמים[36]) ל״ז ראשונים[15]) כ״ב שניים[16]) וזהו שרש אלף[37]) ואם נכפלנו על אלף נמצא שרש עשרת

---

1) H: כ״ה. 2) H: נקח. 3) H: שהיה. 4) H: הם. 5) H: f. 6) H: נחלקנו. 7) H: נשארו. 8) H: f. 9) H: י״ז. 10) H: שיש. 11) H: עתים (!) [Rand: ב׳ פעמים]. 12) H: שניים ח׳. 13) H: ומ״ט. 14) H: מן השרש. 15) H: שניים. 16) H: שלישיים. 17) H: רביעיים. 18) H: כמהו. 19) H: וי״ז. 20) H: כ״ד. 21) H: חמישיים. 22) H: מן המרובע. 23) H: ראשון. 24) H: יהיה. 25) B: הכלל. 26) H: והנה יש. 27) H: ויש. 28) H: וגם. 29) H: והנה. 30) M: f; in H durchgestrichen und dafür am Rande: שלמים. 31) H: ומ״ד. 32) M: f. B am Rande: נ״ל ט׳ שניים מ״ד שלישיים. 33) H: והשרש. 34) H: מ״ז. 35) H noch: מ״ה רביעיים. 36) H: י״ב רביעיים. 37) H noch: ואם נכפול שרש ו׳ (soll heissen י׳) על ק׳ נמצא שרש ק׳ אלף.

אלפי אלפים. **שאלה** חלקנו שרש י״ח על שרש ח׳ כמה יעלה[1]) בחלוק[2]) ידענו כי אין לי״ח שרש נ״ב לח׳ והנה נעשה דרך אחרת שנחלק י״ח על ח׳ ויעלה[3]) בחלוק ב׳ ורביע וזה[4]) החשבון[5]) מרובע ושרשו אחד וחצי והנה[1]) כאשר[6]) נוסיף על כפל שרש ב׳ חציו תמצא שרש י״ח מדוקדק. **שאלה** הצבנו סולם אל קיר י׳ אמות גבהותו וככה גבהות הסולם[7]) הורדנו ראש הסולם[7]) מלמעלה ב׳ אמות נבקש לדעת כמה יהיה מרחק[8]) הסולם[7]) מיסוד הקיר אתן לך כלל בדבר זה לעולם יהיה מרובע הנשאר מראש הסולם[7]) עם מרובע מרחק הרגל מן היסוד שוים אל מרובע הסולם והנה חסרנו ב׳ אמות שירד הראש מתחלת הקיר נשארו ח׳ ומרובעו ס״ד נחסרנו מק׳ שהוא מרובע הסולם[7]) ישארו[9]) ל״ו ושרשו ו׳ וככה הוא מרחק הסולם[7]) למטה מן היסוד. **דמיון אחר** הורדנו הראש אמה[10]) כמה המרחק מן היסוד חסרנו א׳ מי׳ ונשארו[11]) ט׳ ומרובעו פ״א נחסרנו מק׳ ישארו[12]) י״ט וזהו מרובע המרחק וככה נוציא[13]) שרשו ידענו כי המרחק מי״ו הוא ג׳ נשימם ראשונים יהיו ק״פ נחלקם על ח׳ שהוא כפל השרש שעבר יעלה[14]) בחלוק[1]) כ״ב ראשונים ל׳ שניים והנה השרש הראשון ד׳ שלמים כ״ב ראשונים[15]) ל׳ שניים[16]) נקח מרובע החלוק ונחלקנו על ח׳ שלמים מ״ה ראשונים[15]) שהוא כפל שרש[17]) הראשון יעלו[18]) נ״ח שניים נחסרנו [0] מן השרש[19]) הראשון יהיה ד׳ שלמים כ״א[20]) ראשונים[15]) ל״ב שניים[16]) ואין צורך[1]) לדקדקו[21]) יותר מזה. **ועתה** נחל לדבר בעגול יען שהוא תלוי בשרש דע כי יש בעגול דברים רבים האחד קו[22]) העגול והשני[23]) האלכסון[24]) והשלישי הכפל והרביעי היתר והחמישי החץ והששי השברים ותוכל להוציא אחד מהם שאינו ידוע מב׳[25]) שהם[26]) ידועים[27]) ויש מהם שיוכל לדעת אחד[28]) שאינו ידוע מאחר[29]) כאשר אפרש ואתן דמיון לכל אחד ואחד[30]). נחשוב עגול אלכסונו י׳ וחצי היתר ד׳ והחץ ב׳ כמה האלכסון חלקנו מרובע חצי היתר על החץ והוספנו[31]) החץ בעצמו על מה שעלה בחלוק והמחובר הוא האלכסון. **דמיון אחר**[30]) באלכסון[32]) י׳ והחץ ג׳[33]) ומרובע[34]) [0]חצי היתר[30]) כ״א חלקנוהו[35]) על החץ עלה[36]) ז׳ והוספנו[31]) עליו ג׳ והנה הוא האלכסון

---

1) H: f. 2) H: החלוק. 3) H: ועלה. 4) H: וזהו. 5) H: בחשבון. 6) H: וכאשר. 7) H: הסלם. 8) H noch: ראש. 9) H: כשארו. 10) H: אחד. 11) H: ישארו. 12) H: ישאר. 13) H: תוציא. 14) H: יעלו. 15) H: שניים. 16) H: שלישיים. 17) H: השרש. 18) H: עלו. 19) H: מהשרש. 20) H: כ״ב. 21) H: לדקדק. 22) H: הוא. 23) H noch: הוא. 24) H: אלכסון. 25) H: מהשנים. 26) H, M f. 27) H: הידועים; H noch: או כאחד; dafür fehlt das folgende von ויש bis מאחר in H. 28) H noch: מהם. 29) B am Rande: ס״א משני ידועים. 30) H: f. 31) H: הוספנו. 32) H: האלכסון. 33) H noch am Rande: והיתר ט׳ וחצי וחציו ד׳ וחצי ומשהו׃. 34) H: ומרובעו. 35) H: חלקהו. 36) H: עולה.

דרך להוציא היתר מן החץ ומן האלכסון הנה חצי האלכסון ה׳ והחץ[1]) אחד נחסרנו מה׳[2]) ישאר ד׳ אל הנקודה[3]) ומרובעו י״ו נחסרנו מכ״ה שהוא מרובע חצי אלכסון ישארו[4]) ט׳ ושרשו ג׳ וככה חצי היתר והנה כל היתר ו׳ וזה הדבר יהיה לך יסוד כי לעולם מרובע מה שנשאר מן החץ אל הנקודה[7]) עם מרובע חצי היתר יהיו שוים אל מרובע חצי האלכסון. דרך אחרת להוציא היתר כפול החץ על כל הנשאר מן האלכסון והעולה הוא מרובע[5]) חצי היתר קח שרשו וכפלהו ותמצא כל היתר. דרך אחרת ראה כמה ערך החץ אל כל האלכסון וככה[6]) תקח ממרובע האלכסון והוא המחובר ממרובע החץ וממרובע חצי היתר וערך[7]) מרובע[8]) החץ אל [10]מרובע החץ[9]) ומרובע[10]) חצי היתר כערך החץ אל כל האלכסון. דמיון בעגול הנזכר החץ ב׳ והנה ערכו[11]) אל כל[11]) האלכסון החמישית והנה חמישית ק׳ שהוא מרובע כל האלכסון כ׳ וזה המספר כולל מרובע החץ ומרובע חצי היתר וראוי להיות מרובע החץ חמישית כ׳ שהוא ד׳ נחסרם מהכ׳ ישארו[12]) י״ו והוא מרובע חצי היתר. דמיון אחר בחשבון שיש לו חלקים ונאמר כי החץ ג׳ שלמים וכ׳ חלקים וזה ערכו אל י׳ שלישית הנה[13]) נקח שלישית ק׳ שהוא[14]) מרובע האלכסון והוא ל״ג שלמים[15]) וי׳ [10]ראשונים ומ׳ חלקים שניים[15]) והוא מרובע החץ נחסרם[17]) מל״ג וישארו כ״ב י״ג כ׳ והוא מרובע חצי היתר ואתן לך דרך[14]) כלל בדברי[18]) העגול ידענו כי ב׳ אלכסונים שוים מחלקים[19]) העגול[16]) ואם החץ[20]) שלישית האלכסון יהיה מרובע[21]) חצי היתר כפלו כי בין שניהם הם ג׳[22]) ואם החץ רביעית האלכסון[14]) יהיה מרובע חצי היתר ג׳ כפל מרובע החץ ועל זה הדרך כל החשבון. **שאלה** אם אמר החץ כ׳ חלקים זה הערך תוכל לקחתו[23]) על שני דרכים האחד שתשיב האלכסון כלו ראשונים יהיו ת״ר ותעשה הערך כך והנה[24]) נכפול כ׳ בק׳[25]) מרובע האלכסון יהיו אלפים[26]) נחלקם[27]) על ת״ר יהיו ג׳ שלמים ושלישית אחד שהם כ׳

100	ב 0
א00	0

---

1) Von והחץ bis הנקודה fehlt in M. 2) H: מהה׳. 3) H: הנקדה. 4) H: ישאר. 5) H noch: שהוא. 6) H: וכך; in H fehlt von וככה bis ג׳ וערך מרובע החץ ומרובע חצי היתר אל מרובע האלכסון. 7) B am Rande: האלכסון כערך החץ אל כל האלכסון. 8) H: המרובע. 9) B, H: f. 10) B, H: מרובע. 11) H: f. 12) H: נשאר. 13) H: והנה. 14) H: f. 15) H: f. H u. M noch: [ו]כ׳ [חלקים] ושלישיתו י״א [שלמים], H ohne das in Klammern Stehende. 16) H: f. 17) Von נחסרם bis היתר fehlt in H. 18) H: בדבר. 19) M: ומחלקים und noch (?) האלכסונים שוים מחלקים האלכסון והם שנים. 20) H noch: הוא. 21) B, H: f; M: רבוע; B am Rande: ג׳ חסר מרובע. 22) B am Rande: ס״א שלישית; H: wie diese ס״א. 23) H: לקחת. 24) H: הנה. 25) H: על ק׳. 26) H: אלפיים. 27) H: וחלקם.

חלקים ומספר זה הוא הכולל שני המרובעים ואם שבנו עוד להפריד מרובע[1]) החין[2]) [0]ממרובע חצי[3]) היתר נקח מג׳ כ׳ ערך ג׳ כ׳ אל ק[4]) והיה [0]ו׳ מ׳[5]) והוא מרובע החין וישאר מרובע היתר ג׳ י״נ כ׳. ובדרך אחרת ידענו כי כ׳ חלקים מי׳ שלמים הוא שליש העשירית נקח מק׳ שהוא מרובע האלכסון שליש[6]) העשירית[7]) יהיה[8]) ג׳ שלמים וכ׳ חלקים. דרך להוציא החין מהיתר גרע מרבע[9]) חצי היתר ממרובע חצי האלכסון וקח שרש הנשאר וגרעהו מחצי האלכסון והנשאר הוא החין. דמיון אמר כי היתר ו׳ נקח מרובע חציו שהוא ט׳ נחסרנו מכ״ה שהוא מרובע חצי האלכסון וישארו[10]) י״ו ושרשו ד׳ נחסרנו מחצי האלכסון שהוא ה׳ ישאר אחד וככה הוא החין. להוציא קו העגול מן קו האלכסון חכמי המדות אמרו כי[11]) הקו הסובב הוא ג׳ מהאלכסון ויותר שביעית והנה הוא[11]) כחשבון[12]) ז׳ אל כ״ב ואם[13]) כפלת האלכסון על[14]) ג׳ ושביעית יהיה העולה הקו הסובב או אם תכפול[15]) האלכסון שתרצה על כ״ב ותחלק העולה על ז׳ תמצא[16]) הקו הסובב והפך זה אם ידעת הקו[17]) הסובב ותרצה לדעת[18]) האלכסון כפול הקו[19]) על ז׳[20]) וחלק[21]) העולה על כ״ב תמצא[16]) האלכסון והנה על דעת אלה אם היה האלכסון אחד יהיה הקו[11]) הסובב[22]) ג׳ שלמים[23]) [0]ח׳ הראשונים[11]) ל״ד שניים[24]) י״ז[25]) שלישיים[26]) וארישמדס[27]) החכם[28]) נתן ראיה כי הוא פחות מזה המספר [0]כי אמר[29]) שהנוסף פחות מי׳[30]) חלקים מע׳ גם הביא ראיה כי הנוסף יותר מי׳ חלקים מע׳[31]) וחצי והנה הנוסף על השלשה שלמים ח׳ ראשונים כ״ד שניים ל״ה שלישיים ונתן ראיה כי[32]) ראוי להיות יותר מזה המספר[33]) ותלמי עשה חשבונו[34]) אמצעי כי התוספת ח׳ ראשונים ל׳[35]) שניים וחכמי הודו אמרו כי אם היה[36]) כ׳ אלף יהיה הקו[17]) הסובב ס״ב אלף ותתל״ח וכאשר תסתכל[37]) זה תמצאנו קרוב מדברי

---

1) H noch: חצי. 2) M noch: וישאר. 3) B H: מחצי; in B übergeschrieben: ג׳ מרובע; H am Rande wie oben. 4) B: ד׳. 5) B: א׳ ומ׳. 6) H: שלישית. 7) H: f. 8) H: יהיו. 9) H: מרובע. 10) H: ישארו. 11) H: f. 12) H: בחשבון. 13) B: והנה. 14) H: אל. 15) H: כפלת und noch קו. 16) H: ותמצא. 17) H: קו. 18) H noch: קו. 19) H: הק׳ [Rand: הקו הסובב נ״ל]. 20) H: הז׳. 21) H: ותחלק. 22) H: הסבב. 23) H: חלקים. 24) H: ראשונים. 25) H: ז׳. 26) H: שניים. 27) B: ואריסמדס; M: וארשמידיש. Vgl. hebr. S. 45 Anm. 1. 28) M: f. 29) H: שאמר. 30) Von מי׳ bis חלקים מי׳ fehlt in H. 31) H noch am Rande: משביעית נ״ל; ferner am Rande: ס״א פחות מן ע״ (עשרה =) חלק׳ (חלקים =) מן ע׳ הביא ראיה שהנוסף פ׳(חות) מע׳. 32) H noch: יש. 33) H: החשבון. 34) H: חשבון. 35) H noch am Rande: נ״ל בלא. 36) H noch: קו האלכסון. 37) H: תשתכל.

תלמי אין ביניהם כי אם ג'[1]) שלישיים[2]) ובעבור כי י' דומה לאחד והעגול יסובבהו[3]) קו אחד הנה אם שמנו האלכסון י' יהיה מרובע היתר בשלישית האלכסון כמספר הקו בלי תוספת ומגרעת וככה אם עשית[4]) מרובע בשלישית העליונה ובשלישית השפלה יהיו שבריו כמספר הקו רק המרובע נוכל לדעת שהוא תת"ק פ"ז וה' תשיעיות וד'[5]) שמיניות תשיעית שהם נ"ג חלקים [0]מן פ"א[6]) והנה[7]) אם שמנו האלכסון י' ונוציא יתר בשלישית[8]) ונעשה עליו משולש[9]) יהיה[10]) רבוע[11]) המשלש[12]) כקו[13]) הסובב וכל מספר שהוא לפני י' יהיה ערך המשלש[12]) בשלישית אל הקו המקיף כערכו[14]) אל י' ואם הוא[15]) יותר מעשרה יהיה ערך הקו המקיף אל המשלש[12]) בשלישית[16]) כערך י'[17]) אל הקו וכאשר נחפש הקו הסובב כמה יהיה אם היה האלכסון אחד יהיה הקו הסובב ג' שלמים ח' ראשונים ל"ג[18]) שניים מ"ב[19]) שלישיים גם[20]) ל'[21]) רביעיים על כן שברי[22]) עגול שאלכסונו[23]) ט"ו[21]) שרש חמשת אלפים בלי תוספת ומגרעת ובמדות ובחכמת המזלות אין צריך[24]) לדקדק זה והנה הוא כאשר אמר ארישמדס[25]) שהוא יותר מי' חלקים מע'[26]) וחצי וקרוב מאד לדברי[21]) חכמי[27]) הודו שאין ביניהם רק דבר שאין בו ממש ולדעת הקשתות והמיתרים[28]) על דעת חכמי המזלות אדבר[29]) עליהם[30]) בספר טעמי הלוחות כי הם מבקשים למוד הקו[31]) הסובב מהיתרים וחכמי המדות מבקשים[32]) לדעת[33]) כמה שברים יכילו בעגול ולפי[34]) דעתם אם ידעת האלכסון כפול מרובעו על י"א וחלק העולה על י"ד אז תמצא שברי העגול והפך זה אם ידעת כמה שברי העגול ותרצה לדעת כמה האלכסון כפול השברים על י"ד [0]וחלק העולה[35]) על י"א[36]) והעולה בחלוק הוא מרובע האלכסון [0]ושרשו הוא האלכסון[21]).

ועתה אשוב לדבר למה יחסרו חכמי החשבון אחד ליסוד. דע כי אחד עד ט'

---

1) In den Hs. steht ד', es muss jedoch כ' heissen, vgl. Anm. 160 zur Übersetzung. 2) B: שלישיות, am Rande: ס"א שלישיים. 3) H: יסובבנהו. 4) H: נעשה. 5) H: וכ'. 6) H: ושפ"א (!) 7) Von והנה bis הסובב steht in H am untern Rande der Seite. 8) H: בשלישיתו. 9) H noch: שוה השוקיים. 10) H: יהיו. 11) H u. M: שברי. 12) H u. M: המשולש. 13) H, M: כמספר הקו. 14) In B am Rande. 15) B am Rande: ס"א קו העגול. 16) In H durchgestrichen. 17) H: הי'. 18) H: ל"ו. 19) H: ל"ב [Rand: ס"א מ"ב]. 20) H: f; in M fehlt von גם bis זה. 21) H: f. 22) H: שבר. 23) H: אלכסונו und noch שעבר על. 24) H: צורך. 25) B: אריסמדס. 26) H: ומע'. 27) H: לאנשי. 28) H: המיתרים. 29) B: דברהי, übergeschrieben הדבר. 30) M: עליו. 31) H: קו. 32) B: מדקדקים. 33) H: f. 34) B am Rande: ס"א וכפי דרכם; M: wie diese ס"א. 35) H: והעולה חלק. 36) H noch: ושרשו הוא האלכסון (s. folg. Z.).

הם המספרים באמת שהם[1]) כנגד ט׳ עגולות וכל המספרים אחריהם הם[2]) נמשלים להם והנה הנמשלים ° הם ראויים[3]) לקחת המעלות מהם והי׳[4]) ראוים אל מעלה ראשונה והק׳ בשנית והאלף בשלישית והי׳ אלף ברביעית וק׳[5]) אלף בחמישית ואלף אלפים בששית וככה עד אין קץ וחכמי החשבון[6]) שמו המספרים הראשונים במעלות על כן הוצרכו לגרוע אחד ליסוד[7]) וברור[8]) זה ותראה[9]) בדמיון[10]) בקשנו לכפול ר׳ על ש׳ והנה הנמשלים ב׳ וג׳ כפלנו זה על זה והיו ו׳ °והמעלות גם כן הם ו׳[2]) נחסר אחד למוסד ישאר ה׳ ותחלתם י׳ אלפים והנה הם ששים אלף וכבר הזכרתי כי בחשבון האמת תחלת הארבעה לי׳ אלפים הוא והנה הדבר שוה אך עשו כן[11]) כדי להקל על התלמידים[12]).

---

1) H noch: ט׳. 2) H: f. 3) H: הוא ראוי. 4) Von והי׳ bis קץ fehlt in M. 5) H: והק׳. 6) M: המזלות(!) 7) H: ביסוד. 8) M: ובירור. 9) H: ותראהו; M: תראה. 10) H noch: זה. 11) H: זה. 12) B noch: תם; M noch: תם ונשלם תהלה לאל׳ עולם סלה תם; Über B s. noch hebr. S. 1 Note 1. Ausserdem in B noch folgende Verse, welche nicht zu diesem Werke gehören:

רְאֵה סֵפֶר כְּלִיל שֶׁפֶר. יְסוֹד מִסְפָּר שְׁמוֹ נִקְרָא:
לְאַבְרָהָם בְּנוֹ מֵאִיר. סְפָרְדִּי אֶבֶן עֶזְרָא:

(s. darüber die Einleitung)

SEFER HA-MISPAR

Das Buch der Zahl

ein hebräisch-arithmetisches Werk

des

R. Abraham ibn Esra

(XII. Jahrhundert).

Zum ersten Male herausgegeben,

ins Deutsche übersetzt und erläutert

von

Dr. Moritz Silberberg.

Gedruckt mit Subvention der **Zunz-Stiftung** in Berlin
und der **Königswarter'schen Stiftung** in Frankfurt a. M.

Frankfurt a. M.

J. Kauffmann.

1895.

Druck von H. Itzkowski, Berlin.

Einleitung.

R. Abraham ben Meïr ibn Esra, geboren zu Toledo 1092, ragt unter den jüdischen Gelehrten der spanischen Schule durch die Schärfe seines Geistes und die Vielseitigkeit seines Wissens hervor. Er entfaltete eine reiche schriftstellerische Thätigkeit, trotzdem seine äusseren Lebensschicksale höchst ungünstige waren. Von Jugend auf arm, gelang es ihm nur schwer, seinen Lebensunterhalt zu gewinnen. Er selbst klagt mit bitterem Scherze in einem seiner Gedichte[1]) über sein stetes Missgeschick: „Wären Kerzen meine Ware, blieb' es Tag mein Lebelang. Handelt' ich mit Totenkleidern, stürb' in meiner Zeit kein Mann." Drückende Lebensverhältnisse veranlassten ihn um das Jahr 1139, seine Heimat in Begleitung seines Sohnes Isaac zu verlassen. Von dieser Zeit an führte er ein unruhiges Wanderleben. Er bereiste Ägypten, Palästina und andere Länder des Orients, kehrte aber bald nach Europa zurück und weilte eine Reihe von Jahren in Italien. Später (um 1156) liess er sich in Südfrankreich, und zwar zuerst in Béziers, dann in Rodez nieder. Mit dem berühmten nordfranzösischen Gelehrten R. Jacob Tam, dem bedeutendsten Talmudisten jener Zeit, wechselte er Freundschaftslieder. Im Jahre 1158 finden wir ihn in England, welches er alsbald wieder verliess, und 1160 ist er wieder in Frankreich, und zwar in Narbonne. Wo er die letzten Jahre seines Lebens zugebracht hat, ist zweifelhaft. Er starb, 75 Jahre alt, 1167,

---

[1]) Rosin, Reime und Gedichte des A. ibn Esra, S. 98.

nach einigen in Rom, nach anderen in Calahorra, einem Dorfe an der Grenze von Aragonien und Navarra.

Die Hauptbedeutung A.'s liegt in seiner exegetischen Thätigkeit. Den grössten Teil der Heiligen Schrift versah er mit seinen Kommentaren, welche den tief eindringenden, scharfsinnigen Forschergeist des Verfassers bekunden. Eine Reihe von Schriften widmete A. der hebräischen Grammatik. Auch die hebräische Poesie, sowohl die synagogale, wie die weltliche, bereicherte er durch seine Dichtungen, deren grösster Teil erst in neuerer Zeit ans Tageslicht gezogen worden ist. Auf dem Gebiete der Philosophie, Astronomie und Mathematik verfasste er ebenfalls wertvolle Arbeiten.

Von den mathematischen Schriften A.'s, welche Steinschneider in seiner Abhandlung[1]) über A. ibn Esra (Suppl. zur historisch-litterarischen Abteilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. XXV, 1880) eingehend bespricht, ist die hier zum ersten Male herausgegebene „Arithmetik" die umfangreichste und für die Geschichte der Mathematik interessanteste. Der Titel derselben lautet gewöhnlich ספר המספר (Sefer ha-Mispar) „Buch der Zahl". Wohl infolge einer Verwechselung mit A.'s grammatischem Schriftchen ספר יסוד מספר (Sefer Jesod Mispar), welches die Zahlwörter behandelt (ediert von S. Pinsker mit Kommentar am Ende seiner Einleitung in das babylonische Punktationssystem, Wien 1863), ist unserem Werke oft der gleiche Titel S. Jesod Mispar beigelegt worden. De Rossi und Graetz[2]) verwechseln es ausserdem mit dem ספר האחד (Sefer ha-Echad), welches unter dem falschen Doppeltitel ספר האחד וספר המספר (S. ha-Echad we-S. ha-Mispar) zuerst in Kobak's Jeschurun I, 1856, später mit dem lateinischen Titel „Abrahami ibn Esra Sepher ha-Echad etc." Odessa 1867 gedruckt wurde.

Über das Jahr der Abfassung unserer Schrift lässt sich Genaues nicht feststellen. Zwar wird dieselbe im ספר

[1]) Diese Abhandlung wird im folgenden kurz mit St. bezeichnet.

[2]) Vgl. St. S. 105 u. 106.

העבור (Sefer ha-'Ibbur)[1]) citiert, welches unser Autor 1146 in Verona verfasste, aber so früh ist sie sicherlich nicht geschrieben worden, da sich A. in seinen anderen Schriften niemals auf dieselbe beruft, wiewohl er oft Gelegenheit dazu hat (z. B. im Kommentar zu Ex. 3, 15). Die Verweisung im S. ha-'Ibbur ist vielmehr als ein späterer Nachtrag anzusehen (vgl. Halberstam im Vorwort zum S. ha-'Ibbur S. 12). In der 3. und 7. Pforte unseres Buches wird auf A.'s Übersetzungswerk טעמי הלוחות (Ta'ame ha-Luchot) hingewiesen[2]), welches derselbe 1160 in Narbonne schrieb, so dass Steinschneider's Annahme (St. S. 105) berechtigt erscheint, das S. ha-Mispar sei kurz vorher verfasst worden.

Das Widmungsgedicht besagt, dass das Werk einem Meïr gewidmet ist, über dessen Person Halberstam (im Vorwort zum S. ha-'Ibbur S. 10 und 11) eine Vermutung ausspricht. Die Worte קטן שנים וחכם בתבונה „jung an Jahren und weise an Einsicht" beziehen sich auf Meïr, nicht auf den Verfasser, wie Grätz (Geschichte der Juden, Bd. VI S. 454), irre geleitet durch das Fehlen des Wortes למאיר im Register des Michael'schen Katalogs, annimmt, woraus er einen falschen Schluss über die Abfassungszeit zieht. Die Verse am Ende der Berliner Hs. (hebr. S. 80 Note 12) gehören zu dem S. Jesod Mispar.

A. behandelt in den 7 Pforten seines Buches I) Multiplikation (כפל), II) Division (חלוק), III) Addition (חבור), IV) Subtraktion (חסור), V) Brüche (שברים), VI) Proportionen (ערכים), VII) Quadratwurzeln (שרשי המרובעים). — Die Anordnung der Multiplikation und Division vor der Addition und Subtraktion, worüber Luzzatto (s. weiter unten) sein Befremden geäussert hat, findet sich auch bei anderen arithmetischen Werken jener Zeit (vgl. St. S. 107).

Ausführliche Mitteilungen aus dem S. ha-Mispar hat

---

[1]) Ed. S. I. Halberstam, Lyck 1874, S. 4a.

[2]) Pf. III: בספר טעמי הלוחות אפרש (hebr. S. 27); Pf. VII: אדבר עליהם בספר טעמי הלוחות (hebr. S. 79).

zuerst der Mathematiker O. Terquem (gest. 1862) gegeben im Journal des Mathématiques pures et appliquées Bd. VI, 1841, S. 275—296, und zwar unter Benutzung der Pariser Hs. 1050 [1]). Ein Auszug der Terquem'schen Abhandlung erschien deutsch im Litteraturblatt des „Orient" 1845. Eine Notiz über die Berliner Hs. (s. weiter unten) gab S. D. Luzzatto (Professor am rabbinischen Seminar in Padua, gest. 1865) in der hebr. Zeitschrift Zion S. 116 (vgl. das. S. 48); s. auch Kerem Chemed Bd. II, S. 46; IV, S. 113; VII, S. 75. Über das Werk im ganzen spricht ausführlich Steinschneider in seiner oben genannten Abhandlung über A. ibn Esra S. 103 - 118. Derselbe citiert im Nachtrage (S. 128; Juni 1880) den 1. Artikel von Léon Rodet („Sur les notations numériques et algébriques antérieurement au XVIe siècle. A propos d' un manuscrit de l' Arithmétique d' Aben-Ezra" in den Actes de la Société philologique Bd. VIII, 1878, S. 1—25), welcher die Hs. Paris 1052 zu Grunde legt, aus der er ein Facsimile und Proben giebt. Steinschneider glaubt, dass Rodet die Abhandlung Terquem's nicht kenne; in den späteren Artikeln (S. 81—132) wird dieselbe jedoch öfter von ihm genannt. P 1052 ist eine Handschrift in Quartformat, deren Papier und Einband darauf hinweisen, dass sie im Orient geschrieben ist. Fol. 1—41 derselben enthält das Sefer ha-Mispar. Am Ende der Hs. findet sich eine Aufgabe über Wurzelziehen mit der Bemerkung: והוא מספר המספר השני לבן עזרא, worunter im Pariser Katalog eine zweite Recension verstanden wird (s. St. S. 105); von einer solchen ist aber nichts bekannt. Unser Sefer ha-Mispar wird vielleicht im Gegensatze zum S. Jesod Mispar mit S. ha-Mispar ha-scheni „zweites Buch der Zahl" bezeichnet. Rodet hält die orientalisch-rabbinische Schrift in P 1052 für älter als aus dem XV. Jahrhundert. Die Hs. ist besonders wertvoll wegen der in ihr erhaltenen Rechenbilder in alten Zifferformen (s. hebr. S. 2 u. 10). Die Varianten

---

[1]) In Paris befinden sich 5 Hss. unseres Werkes, es sind die Nr. 1029, 1049, 1050, 1051, 1052 des Katalogs.

aus P 1052 sind, so weit dieselben sich aus den von Rodet abgedruckten Stücken ergeben, in den Noten zum Texte berücksichtigt worden.

Von unserem Werke hat sich eine grosse Anzahl von Handschriften erhalten, woraus hervorgeht, dass die Schrift sehr verbreitet gewesen ist. Steinschneider (S. 103—105) zählt ungefähr 25 Handschriften auf, teils Fragmente. — Jehuda ben Samuel ben Abbas (Zeit unbekannt) und Josef Caspi aus Argentierre [1]) (um 1300) empfehlen das S. ha-Mispar für den ersten Unterricht in der Arithmetik (vgl. St. S. 117 und 118).

Elia Misrachi (um 1500 in Constantinopel), der bekannte Superkommentator Raschi's, benutzt in seinem gleichnamigen Werke Sefer ha-Mispar [2]) sehr viele Aufgaben aus A.'s Sefer ha-Mispar und nennt öfter A. als Mathematiker (s. Anm. 15 zur Übersetzung).

Zur Bearbeitung des Sefer ha-Mispar habe ich 5 Hs. im Original benutzt, und zwar: Ms. Orient. Oct. 244 der Berliner Kgl. Bibliothek, 1 vollständige (Nr. 43) und 2 fragmentarische Hs. (No. 150 und No. 33) der Münchener Kgl. Bibliothek und eine Herrn S. I. Halberstam in Bielitz gehörige, welche zahlreiche Varianten aufweisen.

Hs. Berlin 244 (im folgenden mit B bezeichnet) (s. Steinschneider's Verz. d. Berl. Hs. S. 57) in kleinem Quartformat, von einem italienischen Schreiber des XV. bis XVI. Jahrh. herrührend, ehemals S. D. Luzzatto gehörig, enthält einen anonymen Kommentar (im folgenden mit Comm. B bezeichnet), dessen Verfasser wahrscheinlich ein jüngerer Zeitgenosse des Mose ibn Tibbon war (s. Anmerk. 7 zur Übersetzung), also in der 2. Hälfte des XIII. Jahrh. lebte. B Fol. 60a—112a umfasst unser Werk nebst dem Kommentar.

---

[1]) S. die Sammelschrift Ta'am Sekenim, Frankfurt a. M. 1857, S. 51b.

[2]) Gedruckt in Constantinopel 1534. Eine ausführliche Besprechung des Misrachi'schen Werkes giebt Prof. Gustav Wertheim in „Die Arithmetik des Elia Misrachi", Frankfurt a. M. 1893.

Hs. München 43 (M) (s. Steinschneider's Verz. der Münchener Hs. S. 19) ist eine Foliohandschrift des XVI. Jahrh. in deutscher Kursivschrift, sehr unkorrekt geschrieben, indem namentlich א und מ, ב und כ an sehr vielen Stellen mit einander vertauscht sind. Fol. 103b bis 140b umfasst unsere Schrift. Dieselbe ist mit Noten eines Mose שואבי versehen (Chiffre א׳מ׳ש׳ = אמר משה שואבי). Fol. 140b ff. folgen Noten eines jüngeren Anonymus zur 7. Pforte (Chiffre יר׳ ?). Fol. 143—146 enthält noch allerlei Zusätze (anfangend מצאתי תוספת) über verschiedene Rechenoperationen.

Hs. München 150 (M 150) (s. Steinschneider's Verz. S. 95), Foliohandschrift eines unkundigen Schreibers, wohl aus dem XV. Jahrh., in plumper spanischer oder italienischer Schrift, bricht mitten in der 6. Pforte ab.

Hs. München 33 (M 33) (Verz S. 11) in Folio, von demselben Schreiber wie M 43 herrührend, enthält nur (Fol. 151—167) die 7. Pforte mit denselben Noten wie M. 43, ausserdem dieselben Zusätze wie M 43 Fol. 140b bis 146. M 33 hat auf Fol. 167b—168 noch Verschiedenes über Division, Probe u. ä.

Die beiden Hs. M 43 und M 33 gehören zu den sogenannten Codices Bavarici, welche vom Herzog Albrecht V. (reg. 1550—1579), dem Gründer der Münchener Bibliothek, herrühren und teilweise schon vor dessen Regierungsantritt herbeigeschafft wurden. 1548—1552 war namentlich in Venedig eine Anzahl Juden mit dem Kopieren hebr. Werke beschäftigt. (Siehe hierüber den Sitzungsbericht der Münchener philosophisch-philologischen Klasse vom 3. Juli 1875 S. 177).

Die Hs, welche mir durch die Freundlichkeit des Herrn Halberstam zur Verfügung gestellt wurde (H), rührt wahrscheinlich von einem italienischen Schreiber her, dessen Zeit wir nicht genau zu bestimmen vermögen (XV. Jahrh.?).

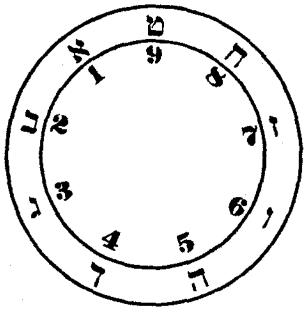
Den Text suchte ich kritisch nach den besten Lesarten zusammenzustellen, die einzelnen Varianten geben die Noten an. Im allgemeinen folgte ich Hs. B.

Schliesslich ist es mir eine angenehme Pflicht, allen denjenigen, welche mir bei dieser Arbeit förderlich waren, auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank auszusprechen. Ich nenne vor allem Herrn S. I. Halberstam in Bielitz, der mir die oben genannte Handschrift (H) längere Zeit überliess, ferner die Herren Prof. Wertheim in Frankfurt a. M., Dr. A. Berliner und M. Steinschneider in Berlin, welche mir mit ihrem Rate freundlichst zur Seite standen. Auch den Verwaltungen der Berliner und Münchener Kgl. Bibliotheken, sowie den Curatorien der Zunz-Stiftung in Berlin und der Königswarter'schen Stiftung in Frankfurt a. M. gebührt mein aufrichtiger Dank.

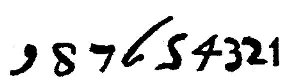
Sieh' hier ein Buch, geschrieben schlicht und wahr,
Worin für jede Rechnung die Lösung klar,
Verfasst von Meïr's Sohn für Meïr,
Jung an Jahren, doch an Wissen reich fürwahr.

Buch der Zahl.[1]

Darum, weil der allein erhabene[2] Gott in der oberen[3] Welt neun[4] grosse Kreise[5] (Sphären) geschaffen hat, welche die Erde, die niedere Welt, umkreisen, und, wie der Verfasser des Sefer Jezira[6] („Buch der Schöpfung") sagt, die Pfade der Weisheit führen durch Zählen, Schreiben und Sprechen,[7] geschieht nun auch das Zählen durch 9 Zahlen;[8] denn 9 ist das Ende jeder Zählung.[9] — Diese werden Einer genannt; dieselben stehen in der ersten Stelle. — Denn[10] 10 gleicht der 1, und 20 gleicht der 2, denn es sind 2 Zehner — und es wäre angemessen, es ʻesrajim[11] („Zehnpaar") zu nennen, wie man von mea („hundert") matajim („zweihundert") bildet und von aelef („tausend") alpajim („zweitausend"), aber um der folgenden Zahlen [Genossen] willen, nämlich ŝelosim („dreissig") bis tiŝʻim („neunzig") hat man es (ʻesrim „zwanzig") nach deren Weise behandelt; ŝelosim kommt aber vom Stamme ŝalos („drei") und so alle folgenden —; 100 aber gleicht der 1 und auch der 10, 200 gleicht der 20 und auch der 2, ebenso ist's mit 1000 und 10000, denn jene sind die Anfänge von Dekaden[12] für die ihnen folgenden Zahlen, so 1, 10, 100; 2, 20, 200.[13] Beweis hierfür:[14] Wenn Du einen Kreis[15] zeichnest, um seine Peripherie die 9 Ziffern schreibst und nun 9 mit sich selbst multiplizierst; — dies bedeutet, dass es zu einem Viereck werde, dessen Länge gleich seiner Breite ist; — so wirst Du das sehen, und zwar ist's so: Das Quadrat



beträgt 81, so ist die 1 links von der 9 als Anfang der Einer, und die 8, welche der 80 in der Dekade entspricht, rechts von der 9. Wenn Du 9 mit 8 multiplizierst, wird das Produkt 72, so ist die 2 links und die 7, welche der 70 entspricht, rechts. Wenn Du 9 mit 7 multiplizierst, wird das Produkt 63, so ist die 3 links und die 6, welche der 60 entspricht, rechts. Wennn Du 9 mit 6 multiplizierst, wird das Produkt 54, so ist die 4 links und die 5, welche der 50 entspricht, rechts. Weil nun die Zahl 5 die mittlere ist unter den 9 Ziffern, darum wird sie „runde Zahl"[16] genannt; sie kreist nämlich um sich selbst, denn ihr Quadrat enthält 5. Wenn Du nun 9 mit 5 multiplizierst, dreht sich die Sache im Kreise, so dass die Einer nach rechts kommen und die Dekaden nach links;[17] denn das Produkt ist 45, so steht die 5 rechtseitig der 9 und die Dekaden links, nämlich 4 an Stelle der 40. Wenn Du 9 mit 4 multiplizierst, wird das Produkt 36, so entspricht die 3 der 30. Wenn Du 9 mit 3 multiplizierst, wird das Produkt 27, so entspricht die 2 der 20. Wenn Du 9 mit 2 multiplizierst, wird das Produkt 18, so entspricht die 1 der 10. — Daher ist die Probe für eine Zahl, die mit sich selbst oder mit einer andern multipliziert ist, 9;[18] darum haben auch die Weisen Indiens[19] all' ihre Zahlen durch neun bezeichnet und Formen für die 9 Ziffern gebildet, und zwar:[20]



Ich habe dafür geschrieben:[21] א ב ג ד ה ו ז ח ט. Immer nun, wenn Du eine Zahl in den Einern hast vor den Dekaden, d. h. den Zehnern, so schreibe zuerst die Ziffer der Einer, dann die Ziffer der Dekaden hin. Wenn keine Zahl in den Einern ist, wohl aber in der zweiten Stelle, d. h. den Zehnern, so setzt man die Form eines „Rades“ [= Null] O[22] zu Anfang, um zu zeigen, dass in der ersten Stelle keine Zahl ist, und schreibt die Zahl der Zehner danach. Wenn aber die Dekade aus Hunderten und Zehnern besteht, so schreibt man ein „Rad“ zu Anfang, dann die Ziffer der Zehner zu zweit, die Ziffer der Hunderter zu dritt, und wenn eine Ziffer von Tausendern da ist, diese zu viert, die Ziffer von Zehntausendern zu fünft und die Ziffer von Hunderttausendern zu sechst; denn 1, 10, 100 wird in der vierten (Stelle) zu tausend, in der siebenten zur Million („tausend Tausende“), in der zehnten zu tausend Million und so weiter ins Unendliche. Wenn aber eine Zahl von Einern und Hundertern da ist, aber keine Zehner, so schreibt man die Ziffer der Einer zu Anfang, ein „Rad“ zu zweit und die Ziffer der Hunderter zu dritt, und so verfährt man mit Beachtung der Stellen des „Rades“ gemäss den Stellen der Zahl, indem man 1 „Rad“ „zu Anfang setzt oder 2 „Räder“, je nachdem es nötig ist, an den Anfang oder in die Mitte. [Und dies ist das „Rad:“ $\bar{o}$; es bedeutet soviel „wie Spreu (galgal), wie Stoppeln vor dem Winde“ (Ps. 83, 14) und dient nur zur Wahrung der Stellen; in der fremden Sprache heisst es sifra.[23]] Nach diesen Vorbemerkungen will ich die „Pforten“ dieses Buches nennen, und so sagen wir, dass ihrer sieben sind.

Pforte I, Pforte der Multiplikation: eine Ziffer mit sich selbst oder mit einer andern zu multiplizieren oder eine Ziffer mit zwei Ziffern oder mehr zu multiplizieren oder viele mit vielen.

Pforte II, Pforte der Division: eine Dekadenzahl mit einem Einer zu dividieren oder zwei Dekadenzahlen mit einem Einer oder hohe Dekaden mit niederen Dekaden oder Dekaden und Einer mit Einern. Auch werde ich von der Probe zur Pforte der Multiplikation und Division sprechen.

Pforte III, Pforte der Addition: eine Zahl zu einer Zahl zu addieren, einen Einer zu einer Dekade oder eine Dekade zu einer Dekade.

Pforte IV, Pforte der Subtraktion: eine Zahl von einer Zahl zu subtrahieren, Einer von Dekade oder Dekade von Dekade. Auch werde ich von der Probe zur Pforte der Addition und Subtraktion sprechen.

Pforte V, Pforte der Brüche: diese in vielen Beziehungen. Ganze mit Ganzen und Brüchen dabei oder Ganze und Brüche mit Ganzen und Brüchen von allerlei Art oder Brüche mit Brüchen oder Brüche mit Doppelbrüchen („Bruchbrüchen") oder Doppelbrüche mit Doppelbrüchen zu multiplizieren, dividieren, addieren und subtrahieren; und die Proben dazu.

Pforte VI, Pforte der Proportionen. Dies ist eine sehr wichtige Pforte, denn durch sie kann der Mensch die meisten schweren Aufgaben herausbekommen, und die meisten Beweise der Astronomie kommen durch Proportion heraus.

Pforte VII, Pforte der Quadratwurzeln[24] und alle Proben dazu, es sind nämlich viele. Die Messkunde (Geometrie) hängt an dieser Pforte, und diese ist die schwerste aller Pforten. Der Gelehrte [Verständige] hat keine Möglichkeit,[25] die Verfinsterung der Weltlichter zu berechnen, wenn er diese Pforte nicht lernt. Die Sehnen der Kreisbogen ergeben sich aus dieser Pforte.

Pforte I.

Ich habe bereits erwähnt, wie die Stellen der Zahl sind. Wenn Du nun zwei Zahlen zu multiplizieren bekommst, eine Dekade mit einer Dekade, sei es mit sich selbst wie 20 × 20, oder mit einer andern wie 20 × 30, so suche die entsprechende Zahl in der ersten Stelle und sieh', welches das Produkt der Multiplikation der einen mit der andern ist, und behalte es. Dann sieh', wieviel die Stellen der beiden Zahlen sind, sei es dass sie in derselben Stelle stehen oder in zwei (verschiedenen) Stellen, und wisse, wieviel die Summe der Zahl der beiden Stellen ist. 1 subtrahiere immer „zur Basis"[26] und setze in die übrig bleibende Stellenzahl die behaltene Zahl ein [eig.: „suche in der übrig bleibenden Stellenzahl mit der behaltenen Zahl"]. Über die Bedeutung der „Basis" werde ich noch mit Gottes Hilfe sprechen, wenn ich über das Geheimnis der Eins rede.[27] Beispiel. Wir wollen 30 mit 200 multiplizieren. Die der 30 entsprechende Zahl ist 3 und die der 200 entsprechende Zahl ist 2. Multiplizieren wir 2 mit 3, kommt 6 heraus; dies ist die zu behaltende Zahl. Nunmehr aber suchen wir die Stellen: 30 gehört zur zweiten Stelle, den Zehnern, wir nehmen also dafür 2; da 200 zur dritten Stelle gehört, den Hundertern, nehmen wir dafür 3, addieren dazu die 2, sind 5, subtrahieren 1 zur Basis, bleiben 4. Wie wir bereits wissen, ist die vierte Stelle für Tausend; die behaltene Zahl war 6, also das Resultat 6000. Anderes Beispiel. Wir wollen 200 mit 700 multiplizieren. Multiplizieren wir 2 mit 7, kommen 14 heraus; dies ist zu behalten. 200 gehört nun zur dritten Stelle und 700 ebenfalls zur dritten Stelle; nehmen wir dafür 6, subtrahieren 1 zur Basis, also 5. Der Anfang der fünften Stelle ist 10000, die behaltene Zahl war 14, also nehmen wir in dieser Anzahl Zehntausender, so wird das Resultat 140000. Nach dieser Anordnung kannst Du bis ins Unendliche verfahren. —

Wenn nun zwei Zahlen von einer Dekade um ebensoviel differieren [entfernt sind] wie zwei andere[28] Zahlen, nur die eine in Subtraktion, die andere in Addition, so wisse, wie viel das Quadrat der Dekade ist, subtrahiere davon immer das Quadrat der Differenz, so ist der Rest das Gesuchte.[29] Beispiel. Wir wollen 29 mit 31 multiplizieren. Die Dekade ist 30, ihr Quadrat 900, denn $3 \times 3 = 9$; die Differenz ist 1, ihr Quadrat auch 1; subtrahieren wir vom Quadrat der Dekade, so ist der Rest das Gesuchte, und zwar 899. Anderes Beispiel. Wir wollen 66 mit 54 multiplizieren. Die Dekade ist 60, die Differenz 6, also das Quadrat der Dekade 3600. Subtrahieren wir davon 36, das Quadrat der Differenz, so ist der Rest das Gesuchte, und zwar 3564. Anderes Beispiel. Die eine Zahl ist 250 und die andere Zahl 350. Die Dekade ist 300, ihr Quadrat 90000; subtrahieren wir das Quadrat von 50, nämlich das Quadrat der Differenz, welches 2500 beträgt, so ist der Rest das Gesuchte. Nach dieser Anordnung können wir mit andern diesen ähnlichen Zahlen verfahren, bei denen die Differenzen (von der Dekade) gleich sind.

Eine andere wichtige Methode, die ich herausgefunden habe, mit Hilfe von Dritteln: Wir nehmen $^1/_3$ der Zahl, berechnen, wie gross das Quadrat hiervon ist, nehmen die entsprechende Zahl in der nächsthöheren Stelle und subtrahieren das Quadrat des Drittels, so ist der Rest das Gesuchte.[30] Beispiel. Wir wollen wissen, wie gross die Quadratzahl von 3 ist. Wir nehmen ein Drittel davon, das ist 1, das Quadrat hiervon ist 1; dies giebt 10, denn das ist die nächsthöhere Stufe. Davon subtrahieren wir 1, das Quadrat des Drittels, so bleibt 9; dies ist das Gesuchte. Anderes Beispiel. Wir wollen das Quadrat von 15 wissen. $^1/_3$ davon ist 5, hiervon das Quadrat 25, die entsprechende Zahl in der nächsthöheren Stelle 250, subtrahiere davon das Quadrat von 5, d. i. 25, so bleibt 225. Anderes Beispiel. Wir wollen wissen, wie gross das Quadrat von 24 ist. $^1/_3$ davon ist nun 8, das Quadrat hiervon 64 und die entsprechende Zahl in der nächsthöheren Stelle 640. Davon subtrahieren wir das Quadrat des Drittels, d. i. 64, so bleibt 576 und dies ist das Gesuchte.

Wenn aber die Zahl kein ganzes Drittel hat und es ist 1 darin zu viel, so subtrahiere die 1 von der Zahl und rechne die gesuchte Zahl heraus nach der Weise, die ich Dir gezeigt habe. Zu dem Resultat addiere die Zahl, welche ein (ganzes) Drittel hat und die (ursprüngliche) Zahl selbst, so ist die Summe das Gesuchte.[31] Beispiel. Wir wollen wissen das Quadrat von 7. Dies hat nun kein Drittel, also subtrahieren wir 1, das zuviel ist, dann ist $^1/_3$ des Restes 2, das Quadrat hiervon 4 und in der nächstfolgenden Stufe 40. Davon subtrahieren wir 4, das Quadrat des Drittels, so bleibt 36, das Quadrat von 6. Hierzu addieren wir die 6, welche ein Drittel hat, und die 7, unsere ursprüngliche Zahl, beide zusammen sind 13, so ist die Summe 49, und dies ist das Quadrat von 7. Anderes Beispiel. Wir wollen wissen, wie gross das Quadrat von 22 ist. Wir subtrahieren also 1, so bleibt 21; $^1/_3$ davon ist 7, das Quadrat hiervon 49 und in der nächstfolgenden Stufe 490. Davon subtrahieren wir 49, das Quadrat des Drittels, bleiben 441, das Quadrat von 21. Wir addieren 21 + 22 = 43, so kommt als Summe 484 heraus, und dies ist das Quadrat von 22.

Wenn nun 2 zwischen unserer Zahl und der Zahl sind, welche ein Drittel hat, so machen wir es umgekehrt, indem wir zu unserer Zahl 1 addieren, und berechnen, wie gross das Quadrat der Zahl ist, welche ein Drittel hat. Hiervon subtrahieren wir die Zahl, die ein Drittel hat, und die Zahl, die wir hatten, so ist der Rest das Gesuchte.[32] Beispiel. Wir wollen wissen, wie gross das Quadrat von 23 ist. Da dies nun kein ganzes Drittel hat, addieren wir 1, giebt 24, $^1/_3$ davon 8, das Quadrat hiervon 64 und die entsprechende Zahl 640. Davon subtrahieren wir 64, das Quadrat des Drittels, so bleibt 576, das Quadrat von 24. Subtrahieren wir noch von dieser Zahl 47, nämlich 24 + 23, so ist der Rest 529, und dies ist das Gesuchte.

Wisse nun: wenn 2 Zahlen mit einander zu multiplizieren sind, so reichst Du mit einem Male hin; wenn eine Zahl mit 2 Zahlen, musss Du dies zweimal thun, wenn mit 3 (Zahlen), dreimal, und so fort in dieser Weise; und wenn 2 Zahlen mit 2 Zahlen zu multiplizieren sind, musst Du dies viermal thun. Beispiel. Wir wollen 13 mit 28 multiplizieren. Wir multiplizieren also 10 mit 20, was eine Dekade ist, so kommen 200 heraus, ferner 10 mit 8, kommen 80 heraus, giebt 280. Dann multiplizieren wir 3 mit 20 und auch mit 8, so kommen 84 heraus, also giebt alles 364. — Wenn ein und dieselbe Dekade die beiden Zahlen umfasst, so reichst Du mit 3 Malen hin. Beispiel. Wir wollen 13 mit 16 multiplizieren. Da umfasst 10 die beiden Zahlen; wir addieren 3 und 6, giebt 9, also ist ihre Zahl 19. Multipliziere dies mit 10, giebt 190. Multiplizieren wir die beiden kleinen Zahlen, 3 mit 6, giebt 18, also alles 208.[33] — Manchmal reichst Du mit nur 2 Malen hin. Beispiel. Wir wollen die Zahl 24 mit 26 multiplizieren. Da umfasst 20 die beiden Zahlen; wir addieren 4 zu 26, welches die grössere Zahl ist, so kommt die Zahl 30 heraus. Wir multiplizieren 20 mit 30, giebt 600, und multiplizieren die kleinen (Zahlen) mit einander, giebt 24; also beträgt die Summe 624. — Wenn Du 3 Zahlen mit dreien multiplizierst, musst Du dies neunmal thun; und nach dieser Ordnung ist die ganze Rechnung. Sieh' zu, sei es, dass die Zahl aus einer oder vielen besteht, ob die Zahl eine gerade (ein Paar) ist, dann ist auch das Produkt eine gerade Zahl. Das Wesen der geraden Zahl liegt in den Einern, denn eine jede Dekade ist eine gerade Zahl. Wenn nun die eine Zahl eine gerade, die andere unpaar (gesondert), d. h. ungerade, ist, welche von ihnen es auch sei, so ist auch das Produkt eine gerade Zahl. Wenn aber die eine Zahl ungerade und ebenso die andere ist, so ist auch das Produkt ungerade. Merke ferner: Wenn die mit einander zu multiplizierenden Zahlen viele sind, musst Du sie mit Schreibung der 9 Zeichen multiplizieren, die ich Dir gezeigt habe.[34] Der gerade (ebene) Weg ist nun der, dass Du die kleinere Zahl in die oberste Reihe setzest; die kleinere Zahl ist diejenige, deren Dekade kleiner ist, um die Einer kümmerst Du Dich nicht. In eine niedrigere Reihe darunter setzest Du die Zahl, deren Dekade grösser ist. Wenn aber die Zahl, deren Dekade kleiner ist, aus mehr Ziffern besteht als die Zahl, deren Dekade grösser ist, so setze diese zu oberst ohne Rücksicht; wenn Du umgekehrt verfährst, schadet's nicht, verwirrt nur ein wenig den Schüler. Nachdem Du die Zahlen, so viele ihrer sind, in die obere Reihe und die andern in die untere Reihe gesetzt hast, multipliziere die erste von der oberen Reihe mit der ersten von der unteren Reihe, und das Resultat schreibe unten gegenüber der obersten ersten Reihe in eine dritte Reihe. Dann multipliziere die oberste erste Zahl mit der zweiten unteren Zahl und schreibe (das Resultat) in die dritte Reihe gegenüber der zweiten obersten Zahl; und so fort alle unteren Zahlen mit der ersten obersten Zahl.[35] Wenn bei der Multiplikation der ersten obersten mit der gegenüberstehenden in der unteren (Reihe) in der Zahl Dekade und Einer sich verbindet, so schreibst Du den Einer an den ihm zukommenden Platz und die Dekade schreibst Du in ihrer Zahl zur folgenden Zahl. Nachdem Du nun fertig bist, die erste Zahl von der obersten Reihe mit allen Zahlen der unteren Reihe zu multiplizieren, fängst Du an, die zweite Zahl von der obersten Reihe mit der ersten Zahl von der unteren Reihe zu multiplizieren; das Resultat schreibe in die dritte Reihe gegenüber der zweiten obersten (Zahl). Dann multiplizierst Du die zweite in der obersten Reihe mit der zweiten in der unteren Reihe und schreibst es in die dritte Reihe in die dritte Zahl, welches die zweite ist von der Zahl, mit der Du jetzt begonnen hast. Dann fängst Du mit der dritten obersten Zahl an, sie mit der ersten in der unteren Reihe zu multiplizieren, und schreibst das Resultat gegenüber der dritten Reihe, mit der Du angefangen hast. So (verfährt man) mit allen bis ins Unendliche und beachtet die Vorschrift, dass der Einer in die niedrigere Stelle kommt und die ihm folgende Dekade danach. Wenn eine Null, sei es in der obersten oder in der unteren Reihe steht, so ist die Regel dafür, sie an den ihr zukommenden Platz zu schreiben, wie es für alle Zahlen Regel ist, die neben ihr stehen. Dann fange an zu addieren, was in der oberen Reihe herauskam, mit der unteren; wenn keine Zehner dabei sind, schreibst Du hin, wieviel es in der Addition ist; wenn aber 10 dabei ist, so schreibe 1 dahinter,[36] und wenn mehr dabei ist, schreibe den Überschuss unten in Deine Additonsreihe und an Stelle der 10 schreibe 1 in der nächsten Reihe zu, und so verfährst Du mit allem, was von der oberen und unteren Reihe herauskommt, und was ausser den Zehnern übrig bleibt, schreibe unten hin. Nachdem Du nun weisst, wie gross die Summe in der dritten Reihe ist, zähle ihre Stellen und sieh' zu, ob sie so viel betragen wie die Anzahl der Stellen der beiden oberen Reihen vermindert um 1, dann weisst Du, dass Deine Rechnung richtig ist. Wenn die letzte Zahl in der obersten Reihe, multipliziert mit der letzten Zahl in der unteren Reihe, in eine Dekade übergeht, so ist die

Anzahl der Stellen der dritten Reihe gleich der Anzahl der beiden oberen Reihen ohne Verminderung von 1. Beispiel. Wir wollen 127 mit 355 multiplizieren.[37] Wir schreiben 127 in die oberste Reihe wie hier[38] und die Zahl 355 darunter, ein jedes Zeichen an seinen Platz. Wir multiplizieren 7 mit 5, giebt 35; wir schreiben 5 in die erste Stelle und 3, welches 30 bedeutet, in die zweite Stelle. Ferner multiplizieren wir die obere 7 mit der zweiten unteren 5, giebt 35; wir schreiben 5 in die zweite Stelle unter die 3 und 3 in die dritte. Ferner multiplizieren wir die erste 7 mit der unteren 3, giebt 21; wir schreiben 1 in die dritte (Stelle) unter 3 und 2 in die vierte. Ferner multiplizieren wir die mittlere obere 2 mit der ersten 5 von der unteren (Reihe), giebt 10; wir schreiben 1 in die dritte (Stelle) unter die 1. Ferner multiplizieren wir die obere 2 mit der zweiten unteren 5, ist ebenfalls 10; wir schreiben 1 unter 2 in die vierte (Stelle). Ferner multiplizieren wir die obere 2 mit der unteren 3, ist 6; wir schreiben dies unter 1 in die vierte (Stelle). Ferner multiplizieren wir die letzte obere 1 mit der ersten unteren 5, giebt 5; das schreiben wir in die dritte (Stelle). Ferner multiplizieren wir 1 mit der zweiten unteren 5, giebt 5; das schreiben wir in die vierte (Stelle). Wir multiplizieren die obere 1 mit der unteren 3, giebt 3; das schreiben wir in die fünfte (Stelle) hinter 2. So ist die Multiplikation zu Ende. Wir addieren alle diese Zahlen, — alles, was von ein und derselben Stelle ist, mit einander, — und wo es mehr als 10 ist oder 10, schreibe diese nach dieser Stelle. So kommt als Summe heraus 45085. Zuletzt prüfe durch die „Probe", und zwar verfährst Du so: Betrachte jede Zahl, die Du in der obersten Reihe in irgend welcher Stelle findest, als wären es Einer, addiere sie und ziehe aus der Summe je 9 heraus.[39] Wenn es mehr als 9 beträgt oder weniger als dies, so schreibe das besonders, und dies ist die „Probezahl"[40] der obersten Reihe. Ebenso verfährst Du mit der Probezahl

127
355
32335
115
61
55
45085

der unteren Reihe, bis Du weisst, wie gross ihre Probezahl ist. Multipliziere die Probezahl der obersten Reihe mit der Probezahl der unteren Reihe, aus dem Produkt ziehe je 9 heraus und den Rest behalte bei Dir. Wenn die Probezahl einer der Reihen 9 ist, bemühe Dich nicht erst, die Probezahl der andern Reihe zu suchen, denn immer kommt 9 heraus. Dann untersuche die Probezahl der dritten Reihe und sich', ob sie gleich der behaltenen ist, dann ist Deine Rechnung richtig, wenn aber nicht, so hast Du Dich geirrt.[41]

Pforte II.

Merke, dass jede Zahl eine Summe von Einern ist,[42] nur die 1 allein nimmt keine Veränderung, keine Vermehrung und keine Teilung an. Sie ist der Anlass einer jeden Vermehrung, Veränderung und Teilung, und nur die 1 ist ursprünglich, und jede Zahl erneut sich durch sie.[43] Sie bewirkt mit einer „Seitenzahl", was jede andere Zahl mit ihren beiden Seitenzahlen bewirkt.[44] So ist 2 für die Zahl 3 die eine Seitenzahl davor und 4 die andere Seitenzahl danach, und die beiden Seitenzahlen summiert sind 6, das Doppelte von 3, und so mit jeder Zahl.[45] Die 1 hat aber vor sich keine Seitenzahl und nach sich eine Seitenzahl, nämlich 2, und diese ist das Doppelte von 1. Nun will ich über jede Zahl sprechen, die ganze Einer ohne Bruch hat. Merke, dass die Astronomen die Himmelskugel in 12 Teile geteilt haben, und zwar thaten sie dies, weil das Sonnenjahr 12 Mondmonate hat, und weil es keine Zahl, kleiner als 12, giebt, die (so viel) ganze Teile hat wie diese; denn sie hat ganze Einer in ihrer Hälfte, ihrem Drittel, Viertel, Sechstel und Zwölftel. Jedes Gestirn teilten sie in 30 Grade, diese Zahl hat nämlich (in ihren Teilen) noch mehr ganze Einer als 12; denn sie hat eine (ganze) Hälfte, ein Drittel, Fünftel, Sechstel und Zehntel. So kommt als Zahl der Grade der Himmelskugel 360 heraus, Diese Zahl ist nahezu gleich den

Tagen des Sonnenjahres und hat eine (ganze) Hälfte, ein Drittel, Viertel, Fünftel, Sechstel, Achtel, Neuntel und Zehntel; nur das Siebentel fehlt ihr. Multiplizierst Du diese Zahl mit 7, so kommt 2520 heraus, und diese Zahl enthält alle Bruchteile bis zu den Zehnteln (als Ganze). Wenn nun die Astronomen Grade mit Graden multiplizieren, so ist das Produkt Grade, also ganze Einer; ebenso, wenn sie Grade mit Graden dividieren, ist der Quotient Grade, also ganze Einer.

Nun will ich Dir eine Regel geben, wie Du eine jede Zahl dividierst, sei es dass sie aus einer, zwei oder vielen Ziffern besteht. Schreibe diese in eine Reihe, eine jede gemäss ihrer Stelle, dann schreibe die Zahl, mit der Du dividierst, in eine andere Reihe, sei es dass sie aus einer oder vielen Ziffern besteht, eine jede gemäss ihrer Stelle gegenüber einer jeden Zahl gemäss ihrer Stelle in der oberen Reihe, und lasse einen Raum zwischen der oberen Reihe und der unteren Reihe, so dass Du eine mittlere Reihe dazwischen schreiben kannst; sei es dass der Quotient aus einer oder vielen Ziffern besteht, setzest Du eine jede gemäss ihrer Stelle hin. Es gehört sich, dass die Zahl, mit der Du dividierst, kleiner ist als die Zahl, welche dividiert wird. Dies ist aber nur bei Division von Ganzen, nicht so bei Brüchen, wie ich mit Gottes Hilfe noch erläutern werde. Wenn Du die Reihen herrichtest, wie ich gesagt habe, fängst Du bei der letzten Zahl der oberen Reihe zu dividieren an und dividierst sie mit der letzten Zahl in der unteren Reihe. Betrachte die beiden Zahlen, obwohl es Dekaden sind, betrachte sie wie Einer und bei dem Quotienten sieh', wie gross die Entfernung der letzten Zahl der unteren Reihe von der ersten Zahl derselben ist, sei es dass dieselbe in Einern oder in einer Null besteht, und nach der Zahl der Entfernung wende Dich rückwärts und schreibe dahin den Quotienten oberhalb der unteren Reihe, also unterhalb der obersten Reihe. Wenn nun bei der letzten Zahl eine Zahl übrig bleibt, die sich nicht teilen liess, und die Division noch nicht bis zu den Einern gelangt ist, so setze die übrig gebliebene Zahl zurück in die erste Stufe, die niedriger ist als diese, rechne jeden Einer gleich 10, dann dividiere mit der Zahl, mit welcher Du dividiert hast, und den Quotienten schreibst Du rückwärts von der ersten Stelle, die Du geschrieben hast, vor das, was zuerst bei der Division herauskam. So verfährst Du beständig, bis Du zu einer Zahl kommst, die kleiner als der Divisor ist, und diesen Rest schreibst Du oberhalb der obersten Reihe gemäss seiner Stufe. In der fünften Pforte werde ich Dir mit Gottes Hilfe erklären, was Du damit machen sollst. Beispiel. Wir wollen 9000 mit 70 dividieren, in folgender Figur. Wir setzen also 70 in die untere Reihe gemäss seiner Stufe und betrachten alles als Einer. Wir geben dafür 1 und schreiben es in die zweite Stelle rückwärts von der letzten Zahl in der ersten Reihe, denn die 7[46] steht an zweiter Stelle in der unteren Reihe, und wir schreiben es in die Mitte, bleiben noch 2 übrig; diese setzen wir rückwärts von der Zahl, giebt 20. Diese dividieren wir mit 7, geben dafür 2 und schreiben es rückwärts vor das zuerst Geschriebene; bleiben noch 6 übrig, diese setzen wir rückwärts, ist 60. Wir dividieren diese mit 7, geben dafür 8 und schreiben es rückwärts, bleiben 4 und zwar in der zweiten Stelle, sind also gleich 40; dann ist der Divisor grösser als diese.

00
264
9000
128
[47]70

Wenn die Zahl, mit der Du dividierst, als Einer betrachtet, grösser ist als die letzte Zahl in der oberen Reihe, so setze diese rückwärts und dividiere von dieser Stelle aus, und je nach der Entfernung des Divisors setze rückwärts und verfahre nach Vorschrift. Beispiel. Wir wollen 20 000 mit 90 dividieren, nach folgender Figur. Da also die Zahl 9 grösser ist als 2, so setzen wir diese rückwärts, giebt 20. Diese dividieren wir mit 9, giebt 2, schreiben diese in die dritte Stelle rückwärts, welche die zweite ist von der Zahl, die wir dividiert haben, so bleiben 2 übrig. Diese setzen wir rückwärts in die dritte Stelle, giebt 20, dividieren mit 9, ist 2, und 2 bleiben übrig[48]. Diese setzen wir rückwärts in die zweite Stelle, giebt 20, dividieren sie mit 9, geben dafür 2 und schreiben diese nach Vorschrift hin, so

00
0222
20000
222
90

bleiben 2 übrig, d. h. 20, denn sie stehen in der zweiten Stelle in der oberen Reihe. Diese Zahl ist kleiner als die Zahl 9, darum schreiben wir eine Null rückwärts, denn es kommen keine Einer mehr heraus und es lässt sich nichts mehr ausziehen. Wenn an einer der Stellen eine Null steht und Du nicht mit dem Divisor dividieren kannst, so setze rückwärts aus der höheren Stelle. Beispiel. Wir wollen 4032 mit 30 dividieren. Wir dividieren 4 mit 3, so erhalten wir 1, schreiben diese rückwärts in die Stelle der Hunderter — denn diese ist ihr die nächste — bleibt uns noch 1. Diese setzen wir rückwärts in die Stelle der Hunderter, giebt 10, dividieren sie mit 3, so ist der Quotient 3, 1 bleibt uns übrig. Diese setzen wir rückwärts in die Stelle der Zehner, giebt 10, addieren diese zu dem, was in der zweiten Stelle steht, giebt 13, dividieren diese mit 3, geben dafür 4, so bleibt uns 1 übrig. Diese setzen wir rückwärts in die erste Stelle, giebt 12, die sich nicht dividieren lassen, denn der Rest ist kleiner als der Divisor, und es ist bereits alles ausgezogen, wie folgt:

00
111
4032
134
30

Wenn wir eine Ziffer oder zwei Ziffern oder mehrere mit einer Ziffer oder zwei Ziffern oder dreien oder mehreren dividieren wollen, unter der Voraussetzung, dass sie weniger betragen als die Zahlen der oberen Reihe, so verfährst Du so: Gieb der letzten in der unteren Reihe von der [oberen] Reihe, soviel Du ihr geben kannst von der letzten Zahl in der oberen Reihe, und gieb der früheren (Zahl) der unteren Reihe, d. h. der ersten vor der letzten, so viel wie das Produkt der Zahl, die Du der letzten gegeben hast, multipliziert mit der Zahl der unteren Reihe ist, die vor der letzten Zahl steht.[49] Kannst Du das nicht thun, so kehre um und vermindere Deine Zahl, die Du zuerst gegeben hast. Musst Du von der Reihe, die vor der letzten steht, irgend eine Zahl nehmen, so setze sie rückwärts als Zehner. So verfährst Du mit allen Stellen. Wenn in einer der Stellen der oberen Reihe eine Null steht, so setze von der nächsthöheren Stelle als Zehner zurück und nimm davon, soviel nötig ist. Sind zwei Nullen in den Stellen der oberen Reihe und in den Stellen der unteren Reihe Ziffern, so setzest Du das Höhere zurück, das gegenüber der Zahl hinter der letzten Null steht, und nimmst davon, was Du brauchst. Den Rest setzest Du rückwärts als Zehner und nimmst davon, was Du brauchst bei der Multiplikation mit der Zahl, die in der unteren Reihe steht, von der Stelle, von der zu nehmen angemessen ist. Folgendes Beispiel.

0
01**9**
120
215**4**
8213
23
353

Die **94**, die wir geschrieben haben, das ist der Rest der Zahl, der sich nicht dividieren lässt. Wenn wir 8, die letzte Zahl der oberen Reihe, durch 3, die letzte Zahl der unteren Reihe, dividieren, geben wir dafür 2, und weil die 3 in der unteren Reihe an dritter Stelle stand, setzen wir sie rückwärts an die dritte Stelle von dort aus, und sie kommt in die Stelle der Zehner. So bleibt uns auf der Zahl 8 zwei übrig; davon lassen wir 1 dort, denn 1 genügt uns, und setzen die 1 zu der 2, giebt 12. Davon subtrahiren wir [10], das Doppelte der mittleren 5 in der unteren Reihe, so bleiben 2 übrig auf der 2. Davon lassen wir 1 dort und setzen 1 rückwärts auf die 1, die an dritter Stelle steht, giebt 11. Davon subtrahieren wir 6 für die erste 3 in der unteren Reihe, so bleiben 5 übrig. Jetzt haben alle 3 unteren (Zahlen), was ihnen zukommt. Nun dividieren wir nochmals, denn es blieb uns 1 auf der 8, 1 auf der 2 und 5 auf der 1. Wir setzen die 1 auf der 8 rückwärts auf die 1 über der 2, giebt 11, dividieren diese mit der 3 in der unteren Reihe, giebt 3, und schreiben diese gegenüber der ersten Reihe vor die 2; so bleiben uns 2 übrig. Diese setzen wir auf die 5 rückwärts, giebt 25, geben der mittleren 5 in der unteren Reihe 15, bleiben 10 übrig; 1 setzen wir rückwärts auf die 3, bleiben 9 übrig. Die 1 mit der 3 giebt 13, davon nehmen wir 9, bleiben 4 übrig und 9 auf der 5. Wir können nämlich nicht zuerst die 3 von der 10 nehmen, obwohl es ausreichen würde, denn es ist jetzt nicht dieselbe Stelle; obwohl zuerst davon genommen wurde, so war es zuerst an dritter Stelle, denn die letzte (Zahl) in der unteren Reihe nahm von der 8, aber jetzt nahm sie von der 2, und da dies an dritter Stelle steht, muss es von derselben Stelle nehmen. Der Rest ist also 94. Anderes Beispiel. Wir haben 9 mit 2 zu dividieren.

```
   2
  30
 051
3605
9381
  31
 296
```

4 können wir dafür nicht geben, denn dann bleibt nur 1 übrig, und wenn Du es rückwärts setzest, giebt es mit der 3 zusammen 13, 4 mal 9 ist aber 36; also geben wir dafür 3, bleiben 3 übrig. Diese setzen wir im ganzen rückwärts zu der nächsten Zahl, d. i. 3, giebt also dort 33. Für die 9 geben wir 3, ist 27, bleiben noch 6 auf der 3 übrig. Davon nehmen wir 1, lassen also 5, und setzen es auf die 8, welche von der letzten (Zahl) der oberen Reihe aus die dritte ist, so giebt es zusammen mit der 8 in der zweiten Reihe 18. Diese geben wir im ganzen für die 6, die dritte (Zahl) in der unteren Reihe, und schreiben über die 8 eine Null, weil auf der 8 nichts übrig bleibt. Wir dividieren nochmals, denn es ist noch nicht alles ausgezogen worden. Wir nehmen von der 5, die wir auf der 3, der zweiten (Zahl) in der oberen Reihe, gelassen haben, 2, d. h. (der Quotient ist) 1 und schreiben diese 1 über die 6 hinter die 3, die wir bei der ersten Division auf die 9 gesetzt haben, also über die dritte Stelle in der unteren Reihe, dann ist bereits alles ausgezogen worden. Wir nehmen von der 3, die über der 3 steht, 1, bleiben 2 übrig, setzen die 1 auf die 0, sind 10, geben der 9 in der unteren Reihe 9, so bleibt auf der Null 1. Dies setzen wir rückwärts auf die 1, welche vierte und vorderste (Zahl) in der oberen Reihe ist, giebt 11, geben dafür 6, so bleiben 5 übrig auf der 1. Es bleiben also auf der oberen Reihe übrig: 5, 0 und 2, d. h. 205. Diese lassen sich nicht mehr dividieren, denn die drei (Zahlen) in der unteren Reihe betragen 296. Das für eine jede derselben Genommene (d. h. der Quotient) beträgt 31. Anderes Beispiel. Wir wollen die obere Reihe mit der unteren dividieren. 2 können wir dafür nicht geben, denn dann bleibt nur 1 übrig; dies giebt mit der 4 zusammen 14, und wir müssen es mit 2×9 dividieren. Wir geben also nur 1 dafür und schreiben dies

10
0818
2442
3564
54093
18
2945

gegenüber der 9 in der oberen Reihe, also von der 5 rückwärts in die vierte Stelle, ebenso wie die 2 in der unteren Reihe in der vierten Stelle steht von der ersten 5 in der unteren Reihe. 3 bleiben auf der 5, davon nehmen wir 1, bleiben 2 auf der 5, setzen es (d. h. 1) rückwärts auf die 4, giebt 14, nehmen 9, bleiben 5 übrig. Nun muss die 4 in der unteren Reihe von der dritten (Zahl) in der oberen Reihe nehmen, weil sie an dritter Stelle steht, kann aber nicht, denn die dritte (Zahl) in der oberen Reihe ist eine Null. Wir setzen also von der 5, die wir auf der 4 gelassen haben, 1 zurück, giebt 10; (die 4) nimmt 4, bleiben 6 übrig auf der Null. Nun nimmt die 5, welche am Anfange der unteren Reihe steht, als vierte (Zahl) von der vierten in der oberen Reihe, d. i. 9, bleiben 4 auf der 9. Wir dividieren nochmals, denn es ist noch nicht alles ausgezogen worden. Übrig geblieben sind die 3 von der oberen Reihe als vorderste und fünfte Zahl, 4 auf der 9, 6 auf der 0, 4 auf der 4, und 2 auf der 5. Wir setzen die 2 auf die 4 zurück, giebt 24, geben für die 2, die vierte (Zahl) in der unteren Reihe 8, bleiben 8 auf der 4 übrig. Davon setzen wir 7 auf die 6 zurück, und 1 bleibt auf der 4 übrig, giebt 76, nehmen 72 für die 9, bleiben 4 an Stelle der 6. Würden wir davon 3 zurücksetzen, so wäre es (eigentlich) richtig, denn die 4 in der unteren Reihe können von der 3 zusammen mit der 4 dahinter, also von 34, nehmen, aber es bleibt nur 2 übrig, und wenn wir diese auf die 3 zurücksetzen, giebt's nur 23, die 5 müssen aber 40 nehmen. Daher setzen wir die 4 im ganzen auf die 4 zurück und schreiben eine 0 an Stelle der 4 gegenüber der 0 in der oberen Reihe; das giebt 44, die 4 nehmen 32, bleiben 12 übrig. Davon nehmen wir 4 – weniger genügt uns nicht — bleiben 8 auf der 4 über der 9. Mit der 3 giebt es 43, die 5 nehmen von 40, bleiben 3 auf der 3[50] übrig, 8 auf der 9, die gleich 80 sind, eine 0, um die Zahl von den Hundertern hinaus und in die Tausender hinein zu bringen,[51] und 1 auf der vierten (Zahl), der 4, welche gleich 1000 ist. Diese (Zahlen) lassen sich nicht mehr dividieren, denn der Divisor[52] ist grösser, nämlich 2945. Anderes Beispiel. Wir wollen 68921 mit 7053 dividieren; folgendes ist die Figur. Die 7, die vierte (Zahl) in der unteren

4
05474
68921
9
7053

Reihe, kann nicht von der 6, der fünften in der oberen Reihe, nehmen. Da wir der 7 nicht geben können, was sie braucht, setzen wir die 6 im ganzen auf die 8 zurück, giebt 68. Wir dividieren also von der 8 aus, der vierten (Zahl) in der oberen Reihe, geben dafür 9, bringen diese an die äusserste Stelle auf die 3, die vierte Zahl in der unteren Reihe, so bleiben 5 auf der 8 übrig. Die der 7 folgende Zahl nimmt gar nichts, denn sie ist eine 0. Die 5 muss nun von der 2, der vierten Zahl in der oberen Reihe, der dritten bei der Division, nehmen, kann aber nicht nehmen, weil diese kleiner ist. Wir nehmen also von der 9, die dahinter steht, 5, setzen sie auf die 2 zurück, giebt 52, und 4 bleiben auf der 9 übrig. Die 5 nehmen 45 von 52, bleiben 7 auf der 2 übrig. Von den 7 nehmen wir 3 und setzen sie rückwärts auf die 1, giebt 31. Die 3 nehmen 27, bleiben 4 auf der 1 übrig. Anderes Beispiel. Wir wollen 680 402 mit 2009 dividieren, Ziffern mit Ziffern, so dass in der oberen Reihe 2 Nullen sind und ebenso in der unteren Reihe. Wir geben der 2, der vierten (Zahl) in der unteren Reihe, 3 von der 6, der sechsten in der oberen Reihe. Die Null, die zweite (Zahl) in der unteren Reihe, müsste nun von der 8 in der oberen Reihe nehmen, nimmt aber nichts; und die Null, die dritte (Zahl) in der unteren Reihe, müsste von der 0, der dritten in der oberen Reihe, nehmen, kann aber nicht nehmen. Nun muss die

0 3
1146
077730
680402
338
2009

9, die erste (Zahl) in der unteren Reihe, von der 4 in der oberen Reihe nehmen, kann aber nicht, daher müssen wir von der 8, der zweiten (Zahl) in der oberen Reihe, soviel zurücksetzen wie für die 9 genügt. Wir setzen 1 zurück, denn 1 genügt uns, schreiben auf die 8 eine 7, und die 1, die wir auf die Null zurückgesetzt haben, geht für uns in die Zehner über. Das genügt noch nicht, (sondern) wir nehmen 3 davon, setzen sie rückwärts, so bleiben 7 auf der Null, und die 3 geben 30 auf der 4. Es bleiben also übrig: 7 an Stelle der 4, 0 und 2, die ersten in der oberen Reihe, 7 auf der 0, und 7 auf der 8. Wir dividieren nochmals, denn es ist noch nicht alles ausgezogen. Wir nehmen dafür 3 von der 7 auf der 8 und setzen sie unter die erste 0, die vierte (Zahl) von der 8 aus, so bleibt 1 auf der 8 übrig. Nun müsste die 0 von der 0 nehmen, kann aber nicht, dann müsste die Null dahinter von ihrer Stelle, der 7 auf der 4, nehmen, kann aber nicht. Die 9 muss nun von der Null nehmen, die ihre Stelle ist, denn sie ist die vierte in der Division, kann aber nicht, weil auf der Null nichts steht und man sie nicht auf die 2 rückwärts setzen kann, denn die 2 steht nicht in ihrer Stelle. Wir setzen also von der 7 auf der vorhergehenden 4 3 zurück auf die Null, giebt 30, bleiben auf der Null 3 übrig, 4 auf der 4 davor, 7 auf der Null vor der 8 und 1 auf der 8. Wir dividieren nochmals, denn es ist noch nicht alles ausgezogen. Von der 1 kann die letzte (Zahl) in der unteren Reihe nicht nehmen, wir setzen sie also rückwärts auf die 7 über der 0, giebt 17, geben dafür 8, bringen diese an die äusserste Stelle hinter die 3, an die vierte Stelle der Division, denn von der 7 auf der 0 aus haben wir dividiert; dort bleibt 1 übrig. Nun müsste die 0 von der 4 nehmen, nimmt aber nicht, ebenso müsste die andere 0 von der 3 auf der 0 in der oberen Reihe nehmen, nimmt aber nicht. Die 9 muss nun von der 2 nehmen, kann aber nicht, (also) setzen wir zurück. Wenn wir zu der 3 auf der 0 sagen, sie solle der 2, welche der 0 zunächst steht, geben, so hat sie nicht genug, denn sie hat nur 3. Wir nehmen also von der 4, die an Stelle der 4 steht, 1, dies giebt auf der 0 mit der 3 zusammen 13. Davon nehmen wir 7 und setzen sie rückwärts auf die 2, giebt 72, die alle durch die 9 aufgehen. Wir schreiben auf die 2 eine 0, denn es ist auf ihr nichts übrig geblieben; auf der 0 vor der 2 sind 6 übrig geblieben, 3 auf der 4 und 1 auf der 0 vor der 8. Diese bleiben übrig, denn sie lassen sich nicht dividieren, weil der Divisor grösser ist: die übrig gebliebene Zahl ist 1360 und der Divisor 2009. Ein anderes Beispiel, welches wertvoller und schwerer ist als alle Rechnungen vorher ohne Null. Zunächst will ich erklären, dass immer, wenn eine Zahl von einer anderen getrennt ist, d. h. wenn eine 0 dazwischen geschrieben wird, z. B. 203, wir die 2 oder, soviel wie nach Massgabe der Zahl in der unteren Reihe nötig ist, nicht zu der 3 zurücksetzen, weil die Null in der Mitte steht, sondern wir setzen die 2 oder 1 davon zu der Null zurück und dividieren dann nach Vorschrift. Eine[53] einzige Regel will ich Dir noch sagen für alle Zahlen, die Du dividierst. Immer musst Du, ob es wenige oder viele Zahlen sind, die obere Zahl mit der unteren dividieren, bis es ans Ende der Zahlen kommt; ist es ans Ende gekommen, so lässt es sich, wenn eine Null da ist, nicht mehr dividieren;[54] z. B. folgendes:

0
172
0513
1238
765432
85
8920

Folgendes ist nun die Figur[55] des wertvollen und schweren (Beispiels). Wir wollen die Zahl mit den neun 7 dividieren mit der Zahl von vier 9. Vor allen Dingen will ich Dich lehren, wie Du dividieren sollst. Da, wie Du siehst, die 7 kleiner ist als die 9, musst Du sie rückwärts setzen.[56] Zuerst, wenn Du anfängst zu dividieren, gieb der 9 7 und schreibe sie rückwärts in die vierte Stelle von da, wo Du dividierst, von der zweiten (Zahl) in der Reihe; der Rest ist 14. So fährst Du fort, bis in der ersten Stelle der Division eine 7, ebenso in der zweiten (Stelle) der Division eine 7, in der dritten eine 8 und in der vierten eine 4 bleibt. Wir dividieren nochmals, setzen die 7 in der zweiten Stelle rückwärts in die dritte, dividieren von da an und schreiben eine 7 unter die sechste 7, welche an vierter Stelle der Division steht; der Rest ist 14. So fährst Du fort, bis 7 übrig bleiben, dann 8, dann 5 und dann 4. Wir dividieren nochmals,

0
01
155
0866
1930
75555
088666
149230
7755556
08881120
144444452
777777777
77785
9999 setzen die 7 auf die 8 zurück und setzen sie in die vierte Stelle; der Rest ist 15, und (dann) bleibt übrig: 8, dann 5, dann 5 und dann 4. Unter die dritte 7, d. i. die vierte Stelle der Division, schreibst Du eine 7. Wir dividieren nochmals, setzen die 8 auf die 5 zurück und geben dafür eine 8 unter die achte 7, die vierte Stelle der Division. Übrig bleiben 5 auf 5, dann 5, dann 5 und dann 5. Wir dividieren nochmals, geben die 5 auf die 5 rückwärts und geben 5 unter die neunte 7, die vierte Stelle der Division; der Rest ist 10 und (zuletzt) bleibt übrig: 5, dann 5, dann 6 und dann 2. Noch einmal kann nicht dividiert werden, weil schon bei der 5 alles ausgezogen ist, und weil der Rest 5562, der Divisor aber 9999 ist. Das Erhaltene (der Quotient) ist 77785. Im ganzen kamen bei der Division der Zahl vor: drei 7, drei 8, drei 4, neun 5, eine 6 und eine 2.[57] In der Regel waren bei allen Divisionen 4 (Zahlen im Dividendus)[58] ausser der letzten, wo es sich bis auf 3 verminderte.

Regel der Division. Wenn der Divisor (eig.: die Zahl, mit der Du dividierst) zwei Ziffern oder mehr sind, so dividiere die obere Reihe mit dem Ende der unteren Reihe, wenn die Zahl der oberen grösser ist als die untere. Ist aber die untere grösser als die obere, so setze das Ende der oberen als Zehner rückwärts auf die vorhergehende Stelle und verbinde es mit dem, was dort geschrieben ist. Ist in der vorhergehenden Stelle eine Null, so zähle die Zehner, und nimm davon, was Du der letzten unteren Zahl geben kannst. Schreibe auf, was Du allen anderen Zahlen der unteren Reihe geben kannst, [was Du der letzten giebst,][59] und den Quotienten schreibe in die Mitte zwischen beide Reihen, so weit entfernt von der Stelle, von der aus Du dividiert hast, wie die Entfernung der Endzahl der unteren (Reihe) von der Anfangszahl ist. So verfährst Du bei allen Divisionen, indem Du es bei ihnen so machst, wie bei dieser Division: Du zählst von der Stelle, von der aus Du dividiert hast, soviel wie die Zahl (der Entfernung) der Endzahl der unteren Reihe von ihrer Anfangszahl ist, und schreibst dahin den Quotienten. Die

Zahl, welche nächst der Endzahl in der unteren (Reihe) steht, nimmst Du soviel mal von der Zahl fort, welche nächst der Stelle steht, von der aus Du dividiert hast, wie die Zahl zwischen den Reihen beträgt. Wenn Du nicht hinreichst, setzest Du das, was von der Stelle übrig blieb, von der aus Du zuerst dividiert hast, zurück zu der ihr vorhergehenden Stelle, verbindest es mit dem, was in derselben steht, und nimmst davon Deine Zahl. So verfährst Du mit allen. Beispiel.[60] Wir wollen 83 521 mit 903 dividieren. Die 9 in der unteren Reihe ist grösser als 8, die Endzahl der oberen, darum setzest Du die 8 rückwärts auf die 3, giebt 83. Wir geben für die 9 von der 83 9, sind 81, bleiben 2 auf der 3 übrig. Die 0 kann von der oberen 5 nicht nehmen, und die untere 3 kann von der oberen 5 nicht nehmen, weil es nicht dieselbe Stelle ist, darum setze 3 von der 5 auf die 2 zurück, giebt 32. Davon nehmen wir 27, nämlich 9 × 3, welches die erste Zahl der unteren (Reihe) ist, so bleiben 5 auf der 2 übrig und 2 auf der 5. Da die untere 9 in der dritten Stelle steht und bereits 9 bei der Division herausgekommen ist, so schreiben wir diese in die zweite Stelle, welche die dritte ist nach der oberen 3, von der aus Du dividiert hast. Wir dividieren nochmals und setzen die 2 auf der 3 zu der 2 auf der 5, giebt 22. Davon nehmen wir 2×9, denn 9 ist die untere (Zahl), bleiben 4 auf der 5, und schreiben [die 2] in die erste Stelle, welche die dritte ist nach der oberen 5, von der aus Du bei dieser Division dividiert hast. Die 0 kann von der 5 auf der 2 nichts nehmen und die untere 3 kann von der oberen 1 nicht nehmen, weil nur 1 dabei ist, darum setzen wir 1 von der 5 auf der 2 zu der 1 zurück, giebt 11. Davon nehmen wir 6 für die untere 3, nämlich 2×3, bleiben 4 auf der 5, 4 auf der 2 und 5 auf der 1 übrig, die sich nicht dividieren lassen. Anderes Beispiel. Wir wollen 11 350 mit 110 dividieren. Wir nehmen 1 von der letzten oberen 1 und schreiben sie in die dritte Stelle unter die obere 3; weil die letzte untere 1 in der dritten Stufe steht, entfernen wir das

```
  044
02255
83521
   92
  903
```

Resultat ebenso vom Ende der Zahl, von der zu dividieren Du angefangen hast. Ebenso nimm von der oberen 1 an vierter Stelle die zweite untere 1. Da in der vierten Stelle nichts übrig bleibt und wir nochmals von der oberen 3 dividieren müssen, so nehmen wir davon 3 für die letzte untere 1 und schreiben eine 3 in die erste Stelle, welche die dritte ist nach der 3, von der wir jetzt angefangen haben. Wir dividieren nochmals von da an. Darum setzen wir eine 0 in die zweite Stelle; weil wir bei der ersten Division vom Ende der oberen (Reihe) angefangen haben, daher schreiben wir den Quotienten in einer Entfernung von 3 Stellen davon rückwärts, soviel wie die Stellenzahl der Endzahl der unteren (Reihe); dagegen bei dieser zweiten Division haben wir von der oberen 3 zu dividieren angefangen, darum schreiben wir das Resultat (den Quotienten) rückwärts 3 Stellen entfernt, und es kommt in die erste Stelle. Für die zweite 1 in der unteren Reihe nehmen wir von der oberen 5, bleiben 2 auf der 5 übrig, das sind 20, die sich nicht dividieren lassen; also ist der Quotient 103.

```
 0002
11350
  103
  110
```

Nun wollen wir zum Schluss die Probe kennen lernen dafür, ob Du richtig dividiert hast. Wisse die „Probezahl" des Divisors, sei es dass er aus einer oder mehreren Ziffern besteht, und wisse auch die Probezahl des Quotienten, den Du zwischen die beiden Reihen geschrieben hast, sei es dass er aus einer oder mehreren Ziffern besteht, und multipliziere sie mit einander, d. h. die mittlere mit der unteren. Wisse, was über je 9 übrig bleibt; dies ist das zu Behaltende, wenn Dir keine Zahl übrig geblieben ist, die übrig blieb, weil sie kleiner ist als der Divisor.[61] Blieb Dir aber etwas übrig, so nimm die Probezahl davon und addiere sie zu dem zu Behaltenden, das Du hattest, so ist die Summe das in Wahrheit zu Behaltende. Sieh' zu, ob die Probezahl der grossen Zahl, des Dividendus, in der oberen Reihe gleich ist der Probezahl des Behaltenen, dann weisst Du, dass Deine Rechnung richtig ist. Multiplizierst Du den Quotienten mit dem Divisor, so muss, nachdem Du dazu addiert hast, was bei der Division übrig blieb, die Summe dann gleich sein den Zahlen der oberen Reihe; dann ist die Division richtig.

Pforte II,

d. i. die Pforte der Addition.

In den Büchern der Weisen der Rechenkunst[62] (Arithmetiker) steht geschrieben: Wer wissen will, wie gross die Summe der Zahlen ist, die der Reihe nach bis zu einer gewissen Zahl einschliesslich auf einander folgen, der multipliziere diese mit ihrer Hälfte, vermehrt um $^1/_2$. Das Produkt ist die Summe.[63] Beispiel. Wir wollen wissen, wie gross die Summe der Zahlen von 1 bis 11 einschliesslich ist. Wir wissen, dass die Hälfte von $11 = 5^1/_2$ ist, fügen dazu $^1/_2$, giebt 6. Wir multiplizieren 11 mit 6, so kommen 66 heraus, und dies ist die Summe. Ein anderes Beispiel mit Paarzahlen (geraden Z.). Wie gross ist die Summe bis 18 einschliesslich? Wir nehmen also die Hälfte davon, d. i. 9, und multiplizieren 18 damit, so kommen 162 heraus. Ferner muss man die Zahl 18 mit $^1/_2$ multiplizieren, so kommt 9 heraus. Addiere diese zu 162, so kommen 171 heraus, und dies ist die Summe. Auf diese beiden Weisen geht jede Rechnung. Eine andere Methode: Addiere zur letzten Zahl ein Ganzes und multipliziere mit der Hälfte der Zahl; was herauskommt, ist die Summe.[64] Ein Beispiel mit ungeraden Zahlen. Wie gross ist die Summe bis 11 einschliesslich? Wir addieren 1, giebt 12, die Hälfte von 11 ist $5^1/_2$; wir multiplizieren 12 mit $5^1/_2$, kommen 66 heraus, und soviel beträgt die Summe. Mit geraden Zahlen: bis 18 einschliesslich. Die Hälfte davon ist 9, wir addieren 1 zu 18, ist 19, multiplizieren 19 mit 9, so kommen 171 heraus.[65] Abraham, der Verfasser, sagt: Ich habe eine andere Methode gefunden: Du addierst zum Quadrate der letzten Zahl dessen Wurzel, berechnest die Summe; die Hälfte der Summe ist das Gesuchte.[66] Beispiel. Wir wissen, dass das Quadrat von $11 = 121$ ist, addieren es zu 11, welches die Wurzel und die letzte Zahl ist, kommen 132 heraus, die Hälfte davon ist 66. Mit dieser Methode kannst Du alle Aufgaben dieser Art lösen. Es stellt jemand folgende Aufgabe: Ich habe Zahlen addiert bis zu einer gewissen Zahl, und als Summe kam 465 heraus. Wie gross ist die letzte Zahl?[67] Verdoppele immer die Summenzahl, nimm von dem Verdoppelten die vorhergehende Wurzel und prüfe sie: bleibt nämlich zwischen dem Quadrat und dem Verdoppelten ebensoviel wie die Wurzel, weder mehr noch weniger, so weisst Du, dass die Zahl richtig ist, und die Zahl selbst ist die Wurzel. Wir verdoppeln also 465, so kommt 930 heraus. Es ist bekannt, dass das vorhergehende Quadrat 900 ist, dessen Wurzel 30, und dies ist die letzte der addierten Zahlen. Zwischen dem Quadrat und dem Verdoppelten ist (die Differenz) ja gerade 30, und das ist die letzte Zahl. Andere Aufgabe. Wir haben alle Quadratzahlen bis zu einer gewissen Zahl einschliesslich addiert. Wie gross ist die Summe? Du musst die Zahl kennen, die er genannt hat; soviel wie die Summe der vorhergehenden Zahlen und der Zahl selbst beträgt, dieser bekannten Zahl geben wir einen Namen und nennen sie „Summe.“ Nun nehmen wir $^2/_3$ der Zahl, die er nannte, dazu $^1/_3$ und multiplizieren diese Summe mit der Zahlen-„Summe“, so ist das Produkt das Gesuchte, nämlich die Summe der Quadratzahlen bis zu der genannten Zahl einschliesslich.[68] Beispiel. Wir wollen wissen, wieviel die Quadratzahlen bis 7 einschliesslich betragen. Wir wissen bereits, dass die Summe 28 ist. Nun müssen wir wissen, wieviel $^2/_3$ von 7 ist, vermehrt um $^1/_3$, dies ist 5, denn die $^2/_3$ vermehrt um $^1/_3$ multiplizieren wir mit der „Summe“. Wir multiplizieren also 5 mit der „Summe“, so kommen 140 heraus, und dies ist das Gesuchte. Anderes Beispiel. Wie gross ist die Summe der Quadratzahlen bis 12 einschliesslich? Bekannt ist, dass die „Summe“ dazu 78 ist. Die $^2/_3$, d. i. 8, multiplizieren wir mit 78, kommen 624 heraus. Dazu addieren wir $^1/_3$ der „Summe“, d. i. 26, kommt 650 heraus; dies ist das Gesuchte.[69] Eine andere Aufgabe: Zu wissen, wie gross die Summe der Verdoppelungen (einer Zahl) ist. Es ist nämlich gleich dem Doppelten der letzten (Zahl), vermindert um die erste.[70] Beispiel. Die Summe von 3, 6, 12 ist 24 weniger 3, also 21. Dies ist die Summe. Anderes Beispiel: 1, 2, 4 sind 8 weniger 1, also 7; dies ist die Summe. Ebenso, wenn man nur die letzte Zahl nennt, wenn man z. B. fragt: wieviel betragen die Verdoppelungen bis 32? Verdoppele 32, giebt 64, subtrahiere 1, die erste (Zahl), bleibt 63 übrig; dies ist das Gesuchte. Ich brauche nicht alles dieses zu erwähnen, (sondern) will nur noch folgende Art der Probe erwähnen. Wenn Du eine Zahl zur andern addierst, sei es auch, dass beide aus vielen Ziffern bestehen, setze die eine Zahl in die obere Reihe gemäss ihren Stellen, setze ebenso die andere Zahl gemäss ihren Stellen in die untere Reihe, dann addiere eine jede (Ziffer) zu ihrer Stelle und schreibe die Summe in die dritte Reihe. Dann addiere die „Probezahl" der oberen Reihe zur „Probezahl" der unteren Reihe; ist die Summe beider gleich der „Probezahl" der dritten Reihe, so weisst Du, dass Deine Rechnung richtig ist.

Nun will ich erklären, wie man in die Tabellen der Sternkunde (astronomischen Tabellen) eindringt und wie man „Sekunden" zu „Minuten" vereinigt, Minuten zu „Graden" und Grade zu Sternbildern. Und nun will ich Dir eine allgemeine Methode für die Astronomie angeben. Man teilt die Himmelskugel in 12 Sternbilder, das Sternbild in 30 Grade — die Grade sind wie Einer bei der Zahl; — jeder Grad wird in 60 Teile geteilt, welche Minuten heissen, auch wird noch jede Minute in 60 Teile geteilt, welche Sekunden heissen. Mehr Brüche als diese kommen in den Tabellen der Planeten nicht vor. Merke, dass die Tabellen der Planeten nach der mittleren Bahn[71] in zwiefacher Weise (eingerichtet) sind: einmal nach den Sonnenjahren,[72] da sind die Jahre des „Cyklus" zu je 20 verbunden,[73] oder zweitens nach den Mondjahren, da sind die Jahre des „Cyklus" zu je 30 verbunden. Im Buche „Gründe der Tabellen" werde ich dies erläutern. Wenn man nun die Stellung irgend eines Planeten zu einer beliebigen Stunde wissen will, so rückt man nach den Jahresdekaden ein, die vorübergangen sind, und schreibt auf, was man dort an Zahl von Sternbildern findet, und zwar schreibt man dies an den Anfang einer Reihe. Dann schreibt man, was man an Graden findet, hinter die erste Zahl in dieselbe Reihe und macht zwischen beiden Zahlen eine Trennung durch einen langen Strich. Dann schreibt man, was man an Minuten findet, hinter die Grade und Sternbilder und macht eine Trennung zwischen den Zahlen durch einen langen Strich in derselben Reihe. Dann schreibt man die Sekunden hinter die Minuten in dieselbe Reihe und scheidet dazwischen durch einen langen Strich. Dann rückt man nach den Einzeljahren ein, die vorübergegangen sind, und schreibt, was man findet, Sternbilder unter Sternbilder, Grade unter Grade, Minuten unter Minuten und Sekunden unter Sekunden. Dann rückt man ein entsprechend den Monaten, die vorübergegangen sind, und schreibt alles, was man dort findet, gleichartig darunter. Dann rückt man nach den Tagen des Monats ein, die vorübergegangen sind, bei einem nicht vollendeten Monat, und schreibt alles, was man da findet, gleichartig darunter. Ebenso macht man's mit den ganzen Stunden, die nach „Mittag" vergangen sind,[74] und ebenso mit den Teilen einer Stunde, die nicht vollendet ist. Dann fängt man an, alle Sekunden zu addieren, nimmt für je 60 Sekunden 1 Minute, schreibt, wieviel Minuten von den Sekunden herauskommen, unter die Minuten, die vor den Sekunden stehen, und den Rest der Sekunden, die weniger als 60 sind, schreibt man besonders an einen andern Platz. Dann addiert man wieder alle Minuten und nimmt für je 60 Minuten 1 Grad. Was an Graden sich vereinigt, das schreibe zu den Graden, die vor den Minuten stehen, und die übrigen Minuten, die weniger als 60 sind, schreibe in die Reihe, wohin Du die Sekunden geschrieben hast, aber sie sollen vor den Sekunden stehen. Dann addiere wieder die Grade und nimm für je 30 Grade 1 Sternbild. Schreibe die herauskommenden Sternbilder zu all den Sternbildern, die Du hattest, und, was übrig bleibt von den Graden, die weniger als 30 sind, das schreibe besonders vor die Minuten, die Du vor die Sekunden geschrieben hast. Dann ziehe je 12 Sternbilder, die Du findest, aus, und schreibe den Rest vor die Grade besonders, die Du vor die Minuten, die den Sekunden vorhergehen, geschrieben hast. So hast Du die Stellung des Planeten an der Himmelskugel: die Sternbilder nebst ihren Graden, Minuten und Sekunden.[75] Immer fängst Du vom Sternbild des „Widders“ zu zählen an. Ist die Zahl der Sternbilder 12, so schreibe an den Platz, wo die Sternbilder hingeschrieben werden müssen, eine 0, um anzuzeigen, dass der Planet noch im Sternbilde des „Widders“ ist, dass dies noch nicht vollendet ist, sondern dass er nur vom Sternbilde sich nach Massgabe der Grade entfernt hat, die dort aufgeschrieben sind. Die Minuten gehören zum folgenden Grade. Sind z. B. 17 Grade da, so sind die Minuten solche, die vom 18. Grade vorübergegangen sind. Nehmen wir an, die vollen Minuten sind 15, und sagen, die Sekunden sind 45, so sind diese $^3/_4$ Minute der 16. Minute.

Pforte IV,

d. i. die Pforte der Subtraktion.

Eine Zahl von der andern zu subtrahieren, ist leicht. Ich will Dir nur eine allgemeine Methode angeben, viele Ziffern von vielen Ziffern zu subtrahieren, und zwar nach der Methode der Astronomen und auch nach der Methode der Arithmetiker; diese haben nämlich eine andere Methode. Verfahre' so: Schreibe die Zahl, von der Du subtrahieren willst (Minuendus), in die obere Reihe, und schreibe die Ziffern, die Du subtrahieren willst (Subtrahendus), in die untere Reihe. Immer muss die letzte Zahl in der oberen Reihe grösser sein als die letzte Zahl in der unteren Reihe, um die andern Zahlen kümmerst Du Dich nicht. Findest Du bei einer der Stellen, dass die Zahl der unteren Reihe grösser ist als die Zahl in der oberen Reihe, so setze von der folgenden Zahl nur 1 zurück — das genügt Dir — und rechne es gleich 10, wie wir's bei der Division machen. Beispiel: Die obere Reihe ist 5432 und die untere Reihe 2379. Man muss jede einzelne (Ziffer) der unteren von den oberen subtrahieren, eine jede von ihrer Stelle: 2 von 5, 3 von 4. 7 können wir von 3 nicht subtrahieren, ebenso nicht 9 von 2. Immer fangen wir rückwärts zu subtrahieren an, wie bei der Division,[76] und schreiben, was übrig bleibt (Differenz), in eine dritte Reihe gegenüber der betreffenden Stelle in der unteren Reihe. Wir subtrahieren also 2 von 5, bleibt uns 3; diese schreiben wir unter die vierte Stelle. Wir subtrahieren 3 von 4, bleibt uns 1 übrig. Diese schreiben wir nicht hin, sondern setzen eine 0 an ihre Stelle, denn wir müssen 1 rückwärts setzen, weil die Zahl vorher in der unteren Reihe grösser ist als die ihr entsprechende obere. Das giebt 13, davon subtrahieren wir 7, bleiben 6 übrig. Weil nun aber die erste Zahl in der unteren Reihe grösser ist als die erste in der oberen Reihe, darum müssen wir 1 rückwärts setzen und schreiben (nur) 5 in die dritte Reihe. Oben sind nun 12; subtrahieren wir 9, so bleiben 3 übrig. Dies ist die Figur:

$$\begin{array}{r} 5432 \\ \underline{2379} \\ 3053 \end{array}$$

Willst Du die Probe wissen, so subtrahiere die Probezahl der unteren Reihe von der Probezahl der oberen Reihe, behalte die Differenz, und sieh' zu, ob die Probezahl der dritten Reihe ebensoviel beträgt, dann weisst Du, dass Deine Rechnung richtig ist. Ist die Probezahl der unteren Reihe grösser als die Probezahl der oberen Reihe, so addiere stets zu der Probezahl der oberen 9, subtrahiere von der Summe die Probezahl der unteren und verfahre nach Vorschrift. Beispiel. Wir subtrahieren 1 von 2, bleibt 1 übrig; diese setzen wir rückwärts auf die Null, giebt 10, subtrahieren 7, bleiben 3 übrig. Die Probezahl der unteren (Reihe) ist 8 und die Probezahl der oberen 2. Wir addieren dazu 9, ist 11, subtrahieren 8, bleiben 3 übrig; ebensoviel beträgt die Probezahl der untersten (Reihe).

$$\begin{array}{r} 20 \\ \underline{17} \\ 03 \end{array}$$

Nun wollen wir von der Methode der Astronomen sprechen; denn sie brauchen diese Pforte mehr als die Arithmetiker.

Wir haben schon erwähnt, dass Du es so einrichten sollst: Sternbilder in der ersten Stelle, Grade in der zweiten, Minuten in der dritten und Sekunden in der vierten. Immer fängt man rückwärts zu subtrahieren an: die Sekunden in der unteren Reihe von den Sekunden in der oberen Reihe. Was übrig bleibt, schreibt man in eine dritte Reihe gegenüber den oberen Sekunden. Sind die unteren Sekunden mehr als die oberen, so nimmt man von den oberen Minuten 1, rechnet es gleich 60 Sekunden, addiert dazu die Sekunden, die sich in der oberen Reihe finden, und dann subtrahiert man die unteren Sekunden nach Vorschrift. Hat man 1 von den oberen (Minuten) genommen, so subtrahiere man es von der Zahl der Minuten, welche dastanden. Dann subtrahiere man die unteren Minuten von den oberen Minuten, die sich dort finden, und schreibe die übrig bleibenden ihnen gegenüber in die dritte Reihe. Dann subtrahiere man die Grade von den Graden und schreibe die übrig bleibenden ihnen gegenüber in die dritte Reihe. Sind die Grade in der unteren Reihe mehr als die Grade der oberen, so nehme man von den Sternbildern 1, rechne es gleich 30, addiere dies zu den Graden, die dort stehen, und subtrahiere dann. Man achte darauf, dass man 1 von der Zahl der Sternbilder, die an der ersten Stelle stehen, subtrahiere. Dann subtrahiert man die Sternbilder von den Sternbildern und schreibt die übrig bleibenden in die dritte Reihe ihnen gegenüber. Sind die unteren Sternbilder mehr als die oberen, so addiere man stets zu den oberen 12, subtrahiere dann und verfahre nach Vorschrift. Um die Probe zu erfahren, fängt man bei den Sekunden an, subtrahiert die Probezahl der unteren Sekunden von der Probezahl der oberen, behält den Rest und sieht zu, ob die Probezahl der Sekunden in der dritten Reihe ebensoviel beträgt, dann ist die Rechnung richtig. Wo man sieht, dass man von den Minuten eine Minute weggenommen und zu den Sekunden gesetzt hat, da addiert man zu der Probezahl der oberen Sekunden 6 und subtrahiert dann nach Vorschrift. Mit der Probezahl der Minuten verfährt man ebenso wie mit den Sekunden. Hat man einen Grad wegnehmen müssen und ihn in 60 Minuten umgesetzt, um ihn zu den dastehenden zu addieren, so füge zu der Probezahl der Minuten, die dort gestanden haben, 6 hinzu, subtrahiere dann und verfahre nach Vorschrift. Ebenso verfährst Du mit der Probezahl der Grade wie mit den Minuten und Sekunden. Hast Du von den Sternbildern 1 weggenommen, das Du zu den Graden gesetzt hast, so addiere zu der Probezahl der Grade, die dort zuerst gestanden haben, 3, subtrahiere dann und verfahre nach Vorschrift. Verfahre mit der Probezahl der Sternbilder ebenso wie Du mit all diesen verfahren bist. Hast Du zu den ersten Sternbildern 12 addiert, so addiere zu der Probezahl der Sternbilder, die dort zuerst gestanden haben, 3, subtrahiere dann und verfahre nach Vorschrift.

Eine Regel will ich Dir sagen, etwas, was bei der Subtraktion immer notwendig ist: Die letzte (Ziffer) am Ende der oberen Reihe muss grösser sein als die letzte in der unteren (Reihe), wenn die Reihen gleich sind, d. h. wenn die obere ebenso gross ist wie die untere. Sind die Reihen nicht gleich, indem die obere grösser ist als die untere nach Anzahl der Ziffern, wie hier (Figur fehlt), so setzt man 1 rückwärts, das genügt.

Pforte V,

d. i. die Pforte der Brüche.

Es ist bekannt, dass die 1 gleichsam der Mittelpunkt in einem Kreise ist; darum kann die 1 eigentlich nicht gebrochen werden. Nur weil die Gesamtheit mit dem Namen der 1 benannt wird, wie ein Bild, das den gesamten Körper darstellt, während der Körper [aus Flächen] zusammengesetzt ist, deshalb kann der Mensch aus der 1 in Gedanken Brüche und Doppelbrüche bilden Die Arithmetiker nehmen alle ihre Brüche von einer grossen Zahl, so dass deren Brüche ganze Einer sind, daher ziehen sie $^1/_2$ von 2 aus, $^1/_3$ von 3 u. s. w.

bis zum Ende der ersten Zahlenreihe. Die entsprechende Zahl, von der sie nehmen, nennen sie den „Nenner“; mit deren Quadrat dividiert man das Produkt.[77] Was übrig bleibt und sich nicht dividieren lässt, ist 1 Teil davon oder eine Anzahl von Teilen, die man mit dem Namen der Einer benennen kann, z. B. 1 Viertel, 1 Drittel u. dgl. Manchmal ist der Nenner eine Zahl, die keine Teile hat, die der Mensch aussprechen[78] könnte, denn er ist eine „Primzahl“, die nicht zusammengesetzt ist, z. B. 11 oder 13 u. ä. Ich habe bereits erwähnt, dass die erste Ordnung 9 Zahlen umfasst. Die 1 ist einerseits keine Zahl,[79] andererseits doch eine Zahl, und zwar gleicht sie einer ungeraden Zahl. Addierst Du alle ungeraden Zahlen zu einander der Reihe nach, so entstehen die Quadratzahlen. Vieles giebt es noch (bei der 1), was ich nicht zu erwähnen brauche. Es bleiben also in der ersten (Zahlen-) Ordnung 8 Zahlen;[80] davon sind die Hälfte Primzahlen, die andere Hälfte zusammengesetzte Zahlen. Die Primzahlen sind 2, 3, 5, 7, die zusammengesetzten 4, 6, 8, 9. Wenn man zwei Brüche braucht, die nicht von einer Art sind, also einander nicht gleichen, so suche man bei einem jeden der Brüche, von welcher Anzahl ein jeder von ihnen abgeleitet ist, und multipliziere die eine Zahl mit der andern, so ist das Produkt der (Haupt-) Nenner. Sind drei Arten da, so multipliziere man die Zahl, von der der (1.) Bruch abgeleitet ist, mit der anderen Zahl, von der der Bruch der zweiten (Art) abgeleitet ist, und multipliziere das Produkt mit der Zahl, von der der Bruch der dritten (Art) abgeleitet ist. — Ebenso verfährt man, wenn vier Arten oder mehr sind: man sucht einen Nenner für alle. Dieser wird so genannt („מוֹרֶה“ „Zeiger“), weil er den geraden Weg „anzeigt“; wenn Du willst, nenne ihn anders, das schadet nichts. Nachdem ich Dir das Verfahren mit diesem Nenner gesagt haben werde, werde ich Dir sagen, wie Du Brüche von zwei Nennern berechnen kannst — das ist nämlich kürzer — und wenn ich damit fertig bin, über die Brüche nach der Methode der Arithmetiker zu sprechen und über ihre Einzelheiten, will ich Dir die Brüche der Astronomen erläutern; diese haben nämlich eine andere Methode. Zuerst werde ich Dir Beispiele von den leichten geben, dann werde ich die schweren erwähnen. Zu Anfang nun will ich Dir eine Regel sagen: bei der Multiplikation von Brüchen ist es umgekehrt wie bei der Multiplikation von Ganzen. Wenn nämlich jemand sagt: multipliziere $^1/_2$ mit $^1/_2$, so ist es so, wie wenn er sagte: nimm die Hälfte von $^1/_2$; das Resultat ist $^1/_4$. Wir wissen, dass $^1/_2$ von 2 abgeleitet ist, die Hälfte davon ist 1, die andere Hälfte ebenfalls 1, $1 \times 1 = 1$, das Quadrat des Nenners 4, also ist dieses Eine 1 Viertel, d. i. die Hälfte von $^1/_2$. Wir verfahren also umgekehrt wie mit Ganzen, denn wir suchen das Verhältnis des Produkts zu dem Quadrat des Nenners. Multipliziert man $^1/_3$ mit $^1/_3$, so ist das Produkt $^1/_9$. Multipliziert man $^1/_4$ mit $^1/_4$, so kommt 16 heraus, das Produkt (der Zähler) ist 1, also die Hälfte von $^1/_8$. In dieser Weise geht es bis 10 und ebenso darüber hinaus, z. B. $^1/_{11}$ multipliziert mit $^1/_{11}$ giebt $^1/_{121}$, das Quadrat davon. In dieser Weise multiplizierst Du Brüche der einen Art mit Brüchen derselben Art, sei es dass sie gleich sind oder dass einer von ihnen grösser ist als der andere: Du dividierst dann das Produkt mit dem Quadrat des Nenners. **Beispiel.** Wir wollen $^3/_4$ mit $^3/_4$ multiplizieren. Der Nenner ist 4. Wir rechnen für jedes der $^3/_4$ 3 (Ganze), so ist das Produkt 9, dividieren dies durch 16, das Quadrat des Nenners, giebt $^1/_2 + ^1/_2$ Achtel [81]. Wenn Du willst, dividiere 9 durch 4, so kommt dasselbe heraus, denn $^1/_4$ Viertel ist gleich $^1/_2$ Achtel ($^1/_{16}$). **Beispiel.** Wir wollen $^3/_5$ mit $^4/_5$ multiplizieren. Der Nenner ist 5. Wir rechnen für die $^3/_5$ 3 und für die $^4/_5$ 4, multiplizieren 4 mit 3, giebt 12, das ist das Produkt (der Zähler); also kommen heraus $^2/_5$ des Quadrats und noch 2 Fünfundzwanzigstel ($^{10}/_{25} + ^2/_{25}$). Hat man Brüche von zweierlei Arten genannt, indem man sagt: Multipliziere mir $^2/_3$ mit $^3/_4$, so suchen wir für beide den Nenner. Wir multiplizieren 3 mit 4, so ist dies der Nenner. Für die $^2/_3$ nehmen wir 8 und für die $^3/_4$ 9, multiplizieren 9 mit 8, giebt 72, die Hälfte von 144, dem Quadrate des Nenners; es kommt also gerade $^1/_2$ heraus. Multiplizierst Du 2 mit 3, so kommt ebenfalls die Hälfte des Nenners, nämlich von 12, heraus. Mit 2 Nennern ist das Verfahren leichter. Du brauchst das Quadrat des Nenners nicht, sondern achtest immer nur auf das Produkt, das herauskommt bei der Multiplikation des einen Nenners mit dem andern, denkst Dir, es sei das Quadrat, und dividierst damit. Beispiel. Wir haben als den einen Nenner 3 genommen, weil man Drittel genannt hat, und als den andern Nenner 4, so kommt 12 heraus, das ist der gesuchte (Nenner). Wir nehmen das Verhältnis des Produkts (der Zähler) zu ihm, und zwar nehmen wir für die $^2/_3$ 2, denn von 3 haben wir sie genommen, und für die $^3/_4$ 3, denn von 4 haben wir sie genommen, multiplizieren 2 mit 3, giebt 6, dies ist die Hälfte des Produkts der Nenner. Aufgabe. Wieviel ist $^4/_7$ multipliziert mit $^7/_9$? Suche einen Nenner für beide, der ist 63, nämlich 7×9. Davon $^4/_7$ ist 36, denn $^1/_7$ ist 9, und $^7/_9$ ist 49, denn $^1/_9$ ist 7. Wir multiplizieren 36 mit 49[82], kommen 1764 heraus; das Quadrat des Nenners ist 3969. Dividieren wir unsere erste Zahl mit 63, kommen 28 heraus, nämlich 4×7, das sind $^4/_9$ von 63, oder wenn Du willst: $^3/_7 + ^1/_{63}$. Rechnen wir mit 2 Nennern, so ist ihr Produkt 63 und, was bei der Multiplikation herauskommt, 28, also dasselbe. Sind Brüche von drei Arten da,

$^4/_7$ 63 $^7/_9$		
0		36
02		49
500		1254
1764|28		24
63		27
		1764
$^4/_9$	$^{28}/_{63}$	

z. B. $^2/_3$, $^5/_6$, $^4/_7$, so nimm einen Nenner für sie, indem Du 3 mit 6 multiplizierst, giebt 18, und 18 mit 7, giebt 126; dies ist der Nenner. $^2/_3$ von 126 ist 84, $^5/_6$ davon 105, $^4/_7$ davon 72. Wir multiplizieren 84 mit 105 und das Produkt davon mit 72. Was bei der Division herauskommt, ist ein Teil von dem Quadrat von 126; die Division wird 40 ergeben (d. h. $^{40}/_{126}$). Nehmen wir 3 Nenner, da es drei Arten sind, so brauchst Du das Quadrat des Nenners nicht, sondern nimmst den Nenner und dividierst damit das Produkt der Zahlen. Beispiel. Wir multiplizieren 2 mit 5, giebt 10, multiplizieren

10 mit 4, giebt 40, dies ist ein Teil von 126, das sind $^2/_7 + ^2/_{63}$. Oder Du verfährst so: Multipliziere 3 mit 6, giebt 18, das ist der Nenner, und multipliziere 2 mit 5 giebt 10. Nehmen wir $^4/_7$ von $^{10}/_{(18)}$, so kommen $^2/_7 + ^2/_{63}$ heraus. Oder multipliziere 6 mit 7, giebt 42, das ist der Nenner, und multipliziere 5 mit 4, giebt 20. Nehmen wir $^2/_3$ von $^{20}/_{(42)}$, so kommen $^2/_7 + ^2/_{63}$ heraus. Oder multipliziere 3 mit 7, giebt 21, das ist der Nenner. Dann multiplizieren wir 2 mit 4, giebt 8, nehmen $^5/_6$ und, was herauskommt, ist ein Teil von 21.

Haben wir Ganze zusammen mit einer Zahl, die keine Ganzen, sondern nur Brüche enthält, so nehmen wir die Brüche von dem Nenner und geben für jedes Ganze den ganzen Nenner nach Anzahl des ganzen Nenners und dividieren zuletzt mit dem Nenner. Beispiel. Wir wollen 4 Ganze mit $^3/_5$ multiplizieren. Der Nenner ist 5. Da wir 4 Ganze haben, nehmen wir dafür 4[83]; multiplizieren wir 4 mit 3 und dividieren mit 5, so kommen 2 $^2/_5$ heraus. Wenn wir Ganze und Brüche mit Ganzen und Brüchen derselben Art multiplizieren wollen, so multiplizieren wir zuerst die Ganzen mit den Ganzen, dann die Brüche mit den Ganzen der einen Zahl, ebenso die Ganzen der anderen Zahl mit den Brüchen der einen Zahl und dann die Brüche mit den Brüchen. Oder wir verwandeln alles in Brüche und multiplizieren diese mit jenen und dividieren das Produkt mit dem Quadrat des Nenners. Beispiel. Wir wollen 4 $^2/_5$ mit 5 $^3/_5$ multiplizieren, wie folgt: Zuerst multiplizieren wir die Ganzen mit den Ganzen, giebt 20, dann multiplizieren wir 4 mit 3, giebt $^{12}/_5$, ebenso 2 mit 5, giebt 10 Bruchteile derselben Art, also zusammen 22, dann multiplizieren wir die Brüche mit einander: $2 \times 3 = 6$, dies sind Doppelbruchteile, in der dritten Stufe[84]. Die Ganzen (6) dividieren wir mit 5, dem Nenner, kommt 1 Bruchteil ($^1/_5$) heraus und in der dritten Stufe bleibt 1 als Doppelbruch zurück. Den Bruch, den wir erhalten haben, addieren wir zu den 22, die wir hatten, giebt 23, dividieren diese mit 5, giebt 4 Ganze und 3 bleiben übrig. Also betragen die Ganzen 24, die Brüche 3, nämlich $^3/_5$, das sind 15 von 25, dem Quadrat, und 1 Doppelbruch $\frac{\frac{1}{5}}{5}$; dieser und die anderen (Brüche) sind zusammen $^{16}/_{25}$. Die andere Methode ist die: Wir nehmen für die 4 Ganzen 20, addieren hierzu 2, die Bruchteile, giebt $^{22}/_5$, das ist die eine Zahl, ebenso ist die zweite nach dieser Weise $^{28}/_5$. Wir multiplizieren die eine mit der anderen und dividieren das Produkt mit dem Quadrat 25, so kommen 24 heraus und bleiben 16, die sich nicht dividieren lassen. Anderes Beispiel. Wir wollen $3\,^4/_5$ mit $2\,^3/_5$ multiplizieren, wie folgt: Wir multiplizieren zuerst die Ganzen mit einander giebt 6, dann multiplizieren wir die Ganzen mit den gegenüberstehenden Brüchen, $3 \times 3 = 9$ und $2 \times 4 = 8$, zusammen 17 Bruchteile der ersten Stufe, und multiplizieren die Brüche mit einander, $4 \times 3 = 12$ Doppelbruchteile der zweiten Stufe. Diese dividieren wir mit 5, so erhalten wir 2 Bruchteile, und 2 Doppelbruchteile, die bei der Division nicht aufgegangen sind, bleiben zurück. Wir addieren den Quotienten zu den 17 Bruchteilen, giebt 19, dividieren mit 5, giebt 3 Ganze; diese addieren wir zu den 6 Ganzen, sind 9, bleiben 4 übrig, das sind 20 Doppelbruchteile, dazu die 2, die wir hatten, giebt 22. Alles zusammen ist also $9\,^{22}/_{25}$. Beispiel. Wir wollen Ganze und Brüche mit Ganzen und Brüchen multiplizieren, wo die Brüche nicht von derselben Art sind; dies geschieht so: Die eine (Zahl) sei $3\,^4/_5$ und die andere $6\,^7/_8$[85], wie folgt: Multipliziere die Einer mit den Einern in der ersten Zahl, ebenso die Brüche mit den Brüchen nach Vorschrift, so dass das Produckt der Brüche Teile des Nenners sind, nur müssen wir beachten, wenn wir die Ganzen mit den Brüchen multiplizieren, dass ihre Teile nicht gleich sind. Wir multiplizieren also die Ganzen mit einander, $3 \times 6 = 18$, ferner multiplizieren wir diese 3 mit den 7 Bruchteilen, ist 21, dividieren diese mit 8, denn es sind Achtel, giebt 2 Ganze, also im Ganzen 20 Ganze, und $^5/_8$ bleiben übrig. Wir wissen, dass der Nenner 40 ist, wenn Du 5 mit 8 multiplizierst, diese $^5/_8$ sind 25 Teile, wenn Du $^5/(_8)$ mit $^5/_5$ multiplizierst. Dann multiplizieren wir wieder die 6 mit den $^4/_5$, giebt 24, dividieren diese mit 5, giebt 4 Ganze, also sind im ganzen 24

Ganze, und $^4/_5$ bleiben übrig, das sind 32 Teile, wenn Du 4 mit 8 multiplizierst. Dazu addieren wir die 25 Teile, die wir hatten, giebt 57 Teile. Daraus machen wir 1 Ganzes von 40 ($^{40}/_{40}$), giebt 25 Ganze und $^{17}/(_{40})$ bleiben übrig. Dann multiplizieren wir 4 mit 7, giebt 28 Teile, addieren dazu 17, ist 45. Von $^{40}/_{40}$ geben wir ein Ganzes, so betragen die Ganzen 26 und übrig bleiben 5 Teile = $^1/_8$. Die Methode der Arithmetiker ist, für Brüche von verschiedener Art, einen beide umfassenden Nenner (Hauptnenner) zu suchen, und die Zahl des Nenners ist ein Ganzes. Da die Brüche Fünftel und Achtel sind, ist der Nenner 40. Wir nehmen für die Zahl 3 120 und für die $^4/_5$ 32, also ist die Zahl 152. Hier ist das Bild der Ziffern. Für die 6 Ganzen nehmen wir 240, addieren dazu 35 für die $^7/_8$, so ist die zweite Zahl 275. Wir multiplizieren beide mit einander, so kommt 41800 heraus; dies ist die Figur:

	155
0	275
03	13110
292	2744
41800 26	25
1600	5
	5
	41800

Dies dividieren wir mit 1600, dem Quadrat des Nenners, giebt 26 Ganze, 200 bleiben übrig, die nicht aufgehen. Berechne, welcher Teil 200 von dem Quadrat 1600 ist; das ist $^1/_8$. Den Rest können wir noch in anderer Weise erfahren. Wir dividieren immer, was von dem Quadrate übrig bleibt, mit dem Nenner selbst, so ist der Quotient Teile davon. Wir dividieren also 200 mit 40, giebt 5, also $^1/_8$ davon. Eine andere Methode, mit 2 Nennern: Wir setzen für die eine Zahl, 3, 15, addieren dazu 4, so heisst die erste Zahl 19. Statt 6 nehmen wir 48, addieren dazu 7, giebt 55, das ist die zweite Zahl. Wir multiplizieren die eine mit der andern, giebt 1045, dividieren sie mit dem Produkt von $5 \times 8 = 40$. so kommen 26 Ganze heraus, 5 bleiben übrig, d. h. $^1/_8$. Jetzt müssen wir sprechen von Ganzen mit Brüchen, „die der Mensch nicht aussprechen kann." Ist einer der Brüche ein solcher, den man aussprechen kann, und der andere ein solcher, den man nicht aussprechen kann, so verfährt man so: Beispiel. Wieviel ist $^3/_7 \times {}^5/_{11}$? Letzteres (d. h. die 11) ist das Ganze, das man nicht aussprechen kann. Wir multiplizieren die Brüche mit einander, so ist der Nenner 77. Wir müssen nun darauf achten, dass die Brüche umgekehrt werden, denn ein jedes der Sieben[tel] wird zu 11 und ein jedes der Elf[tel] zu 7. Für die $^3/_7$ nehmen wir also 33, und für die $^5/_{11}$ nehmen wir 35, multiplizieren beides mit einander, giebt 1155. Diese dividieren wir mit 77, so dass wir wissen, wieviel die Brüche betragen, die sich aus diesem Produkte im Verhältnis zu dem Ganzen 77 ergeben, dies sind 15, also von 77 etwas weniger als $^1/_5$. Wenn wir ganz genau rechnen, dividieren wir diese 15 mit 11, dem 7. Teile, so kommt $1\,^4/_{11}$ Siebentel heraus. Dividieren wir mit 7, so kommen $2\,^1/_7$ Elftel heraus. Anderes Beispiel mit 2 Brüchen, die der Mensch nicht aussprechen kann. Wir nehmen als die eine Zahl 13, als die andere 19 an und wollen $^9/_{13}$ mit $^{17}/_{19}$ multiplizieren. Zuerst suchen wir den Nenner in der Weise, dass wir 13 mit 19 multiplizieren, so kommt die Zahl 247 heraus; dies ist der Nenner. Dann multiplizieren wir 9 mit 19, giebt 171, multiplizieren 17 mit 13, giebt 221, multiplizieren beides mit einander, so ist das Produkt 37791. Diese teilen wir durch 247, ist 153. Das Produkt von 9×17 ist ebenfalls 153, und das Verhältnis dieser Zahl zu 247 ist gleich dem Verhältnis der ersten Zahl zum Quadrat von 247 und ist das gesuchte. Willst Du es genau berechnen, dividiere 153 mit 19, ist $^8/_{13}+^1/_{19}$ Dreizehntel. Oder wenn Du willst, dividiere es mit 13, so giebt's $^{11}/_{19}+^{10}/_{13}$ Neunzehntel. Hast Du nun Ganze mit derartigen Brüchen, so verfahre ebenso wie ich Dir gezeigt habe, wenn Du Ganze mit Brüchen hast, die Du aussprechen kannst. Diese Methode habe ich erwähnt, weil man sie sehr nötig braucht bei den meisten Aufgaben und bei Quadratzahlen, um deren Wurzeln zu erfahren, wenn sie Brüche sind, die der Mensch nicht aussprechen kann, wie ich in Pforte VII erklären werde. Eine allgemeine Methode für Doppelbruchbrüche (dreifache Brüche) will ich Dir sagen und ein Beispiel geben, das genügt für Dich,

```
   0
  010
 0172
 13040
 37791 |153
  247  |———
```

denn man braucht das weder bei Proportionen, noch bei Wurzeln, noch bei Aufgaben. Beispiel. Wir multiplizieren $\begin{array}{c}2\\ \hline 3\\ \hline 4\\ \hline 5\end{array}$ mit $\begin{array}{c}6\\ \hline 7\\ \hline 8\end{array}$. Das sind viele Brüche; ich will Dich aber eine kurze Methode lehren, wie Du zu verfahren hast. Merke: wenn Du Sechstel[86] und Achtel hast, brauchst Du Drittel und Viertel nicht. Wir suchen also eine Zahl, die ein (ganzes) Fünftel, Sechstel, Siebentel und Achtel hat. Mir multiplizieren 5 mit 6, giebt 30, ferner 30 mit 7, ist 210, ebenso 210 mit 8, giebt 1680. Nun berechnen wir die erste Zahl. $^1/_5$ des Nenners ist 336, $^1/_4$ davon 84, davon $^2/_3$ ist 56; das ist die eine Zahl. Wie wir bereits wissen, ist das Achtel 210, davon ein Siebentel 30; da $^6/_7$ dastehen, ist die zweite Zahl 180. Wir multiplizieren die eine mit der anderen, so ergiebt sich die Zahl 10080. Diese dividieren wir mit 1680, giebt 6. Die 6 sind $\begin{array}{c}1\\ \hline 5\\ \hline 8\\ \hline 7\end{array}$ (= $^1/_{280}$); denn $^1/_7$ ist 240, $^1/_8$ davon 30 und $^1/_5$ davon 6.

Nun wollen wir von der Division der Brüche sprechen. Verfahre so, wie ich Dir gezeigt habe, indem Du die Brüche in ganze Einer verwandelst, und wenn Ganze mit Brüchen da sind, verfahre nach Vorschrift. Beispiel. Wir wollen $3\,^2/_5$ mit $2\,^4/_7$ dividieren. Der Nenner ist 35. Die 3 Ganzen sind 105 und die $^2/_5$ 14, zusammen 119. Die 2 ganzen Einer machen wir zu 70 und die $^4/_7$ zu 20, giebt 90. Wir dividieren damit 119, so ist der Quotient 1 Ganzes und 29 bleiben übrig, das sind $^2/_9 + {}^1/_{10}$.

		35		02
70	105	$3\,^2/_5$	$2\,^4/_7$	119 | 1
20	14			90
90	119			

Beispiel für reine Brüche. Dividiere $^7/_9$ mit $^2/_7$. Der Nenner ist 63. $^7/_9$ sind 49, $^2/_7$ sind 18. Dividieren wir jenes durch dieses, so kommen $2 + {}^6/_9 + {}^1/_{18}$ heraus. In dieser Weise verfährst Du; Brüche zu dividieren ist nicht oft nötig.

Nun wollen wir von ihrer Addition sprechen. Wir addiren $^2/_5$ zu $^5/_7$; wie gross ist die Summe? Der Nenner ist also 35, $^2/_5$ davon 14, $^5/_7$ ist 25. Addieren wir das, so kommt 39 heraus. Für 35 nehmen wir 1 Ganzes, so bleiben 4 übrig, nämlich $\frac{\frac{4}{5}}{7}$, d. i. $^4/_{35}$. Aufgabe. Wir haben zu einer Zahl ihr Neuntel und ihr Zehntel addiert und erhielten 50.[87] Den Nenner setzen wir gleich 90 an. $^1/_9 + ^1/_{10}$ davon ist, wie bekannt, 19, dies addieren wir zu 90, giebt 109. Ebenso machen wir die 50 zu Neunern, giebt 450, nun machen wir die 450 zu Zehnern, ist 4500. Dies dividieren wir mit 109, giebt 41 Ganze und 31 Teile des Divisors. Nun wollen wir prüfen, ob das richtig ist. Wie wir wissen, ist $^1/_{10}$ von 40 = 4 Ganzen, für das 1 übrig Bleibende nehmen wir 109, addieren dazu die 31, welche mehr sind als Ganze, giebt 140, davon 1 Zehntel ist 14. Dies sind die Teile des Zehntels, die mehr sind als die Ganzen. Nun nehmen wir wieder das Neuntel. Von 36 ist es = 4 Ganzen, bleiben 5 Ganze übrig. Ein jedes rechnen wir gleich 109, giebt 545, dazu addieren wir die 31, welche mehr sind als Ganze, giebt 576, davon $^1/_9$ ist 64. Dazu addieren wir die 14, welche sich bei dem Zehntel ergeben haben, giebt 78, ebenso addieren wir dazu die überschüssigen 31, giebt 109, also 1 Ganzes; alles zusammen ist also 50 Ganze.[88] Andere Aufgabe. Wir nehmen $^1/_5$ einer Zahl, dazu $^1/_7$, dazu $^1/_9$ derselben. Wie viel ist das vom Werte der Zahl?[89] Diese Aufgabe kann man in zwiefacher Weise lösen. Erstens so: Das Neuntel ist kleiner als die anderen Brüche; wir denken uns also, es seien 3 Neuntel da. Die Differenz zwischen dem Fünftel und Neuntel ist 4[90] (von 5 × 9, od. $^4/_{45}$), und die Differenz zwischen [$^1/_9$][91] und $^1/_7$ ist 2 (von 7 × 9, od. $^2/_{63}$). Wir multiplizieren nun 2 mit 4, giebt 8 (d. h. $^8/_{63}$), machen aus 7 (d. h. $^7/_{63}$) $^1/_9$, so haben wir $^4/_9$, und 1 (d. h. $^1/_{63}$) bleibt übrig. Die Differenz zwischen $^1/_7$ und $^1/_9$ ist 2 (d. h. $^2/_{63}$). So ergiebt sich denn (nach Subtraktion der zuviel gerechneten $\frac{\frac{12}{5}}{63}$, also $\frac{3-\frac{12}{5}}{63}=\frac{\frac{3}{5}}{63}=\frac{\frac{\frac{3}{5}}{7}}{9}$) die Zahl $^4/_9 + \frac{\frac{\frac{3}{5}}{7}}{9}$. — Der andere Weg ist folgender: Wir suchen den Nenner, indem wir 5 mit 7 multiplizieren, giebt 35, und dies mit 9 multiplizieren, ist 315; das ist der Nenner. Dann addieren wir $^1/_5$ dieses Nenners, $^1/_7$ und $^1/_9$ desselben, ist 143, dividieren dies mit 35, giebt $^4/_9$ und $\frac{\frac{3}{35}}{(9)}$ bleiben übrig; denn 35 ist $= {^1/_9}$ und 5 ist $= \frac{\frac{1}{7}}{9}$, daher sind 3 Teile $= \frac{\frac{\frac{3}{5}}{7}}{9}$. Andere Aufgabe. Zu einer Zahl haben wir ihre Hälfte, ihr Drittel, Fünftel und Sechstel addiert, zusammen ist es 40. Wie gross ist die Zahl gewesen?[92] Wie wir wissen, ist $^1/_2 + {^1/_3} + {^1/_6} = 1$. Wir denken uns, die Zahl sei 1 gewesen, so erhalten wir $2 + {^1/_5}$. Wir müssen nun 40 mit $2^1/_5$ dividieren, so ist der Quotient die Zahl. Für jedes Ganze rechnen wir 5 (d. h. $^5/_5$), setzen dazu 1 ($^1/_5$), so haben wir 11. Ferner multiplizieren wir die 40 mit 5, damit alles von einer Art ist, ist 200, dividieren diese mit 11, so kommen 18 Ganze + $^2/_{11}$ heraus. Dies wollen wir prüfen: wir nehmen die Hälfte davon, d. i. $9^1/_{11}$, so haben wir $27^3/_{11}$. Ein Drittel ist 6 Ganze + $^2/_3$ (d. h. $\frac{\frac{2}{3}}{11}$), so haben wir also $33 + 3^2/_3$ (d. h. $\frac{3^2/_3}{11}$). Ein Fünftel nehmen wir von 15, also 3 Ganze, so haben wir 36, und wir müssen noch $^1/_5$ von 3 Ganzen nehmen. Für jedes Ganze rechnen wir 11 und addieren dazu die $^2/_{11}$ (der Zahl $18^2/_{11}$), die noch übrig waren, ist 30, also $^1/_5$ davon $= 7$ (d. h. $^7/_{11}$). Dazu addieren wir die $3^2/_3$ (d. h. $\frac{3^2/_3}{11}$), die wir hatten, und nehmen $^1/_6$ von 18, ist 3 Ganze, addieren sie zu 36, ist 39 Ganze. $^2/_6 = {^1/_3}$, dies addieren wir zu $10^2/_3$ Teilen (d. h. $10^2/_3$ Elftel), giebt $^{11}/_{11}$, also 1 Ganzes, im ganzen 40. Aufgabe. Ein Mann ging an Männern vorüber und sagte zu ihnen: „Seid gegrüsst, Ihr 100 Mann!“ Darauf erwiderten sie ihm: „Wir sind nicht 100, sondern wir und noch ebensoviele und die Hälfte und ein Viertel von uns würden mit Dir zusammen erst 100 sein.“[93] Nehmen wir an, ihre Zahl sei 1, dazu ebendiese 1, ist 2, dazu die Hälfte $= {^1/_2}$, ist $2^1/_2$. Dazu addieren wir $^1/_4$, ist $2^3/_4$. Da wir Viertel haben, rechnen wir für jedes Ganze 4, ist 8, addieren dazu die $^3/_4$, ist 11. Da sie gesagt haben, dass sie mit ihm 100 seien, so beträgt ihre Anzahl zusammen mit der Zugabe 99. Diese verwandeln wir in Viertel, giebt 396, dividieren dies mit 11, so ist das 36; dies ist ihre Zahl.[94] Aufgabe. Jemand kauft für 100 „Gulden" 100 „Litra" und verkauft dann 50 Litra, je $1^1/_4$ Litra zu 1 Gulden, und die anderen 50 verkauft er je $^3/_4$ Litra zu 1 Gulden. Wir wollen wissen, ob er Gewinn oder Verlust hatte.[95] Die ersten 50 machen wir zu 200, damit es Viertel sind, dividieren sie durch 5, weil er $^5/_4$ Litra zu 1 Gulden verkauft, giebt 40 Gulden. Ebenso multiplizieren wir die anderen 50 mit 4, ist 200, dividieren sie mit 3, denn $^3/_4$ Litra verkauft er zu 1 G., giebt $66^2/_3$ G. Dazu addieren wir die 40, so ist der Gewinn $6^2/_3$ Gulden. Andere Aufgabe. Jemand kauft je $^3/_5$ Litra für 1 „Paschut", verkauft je $^4/_7$ Litra für 1 Paschut und verdient 1 Paschut. Wieviel zahlte er (beim Einkauf)? Suche den Nenner, der ist 35, nämlich 5×7. $^3/_5$ davon sind 21, und $^4/_7$ davon sind 20. Demnach war die Summe auch 20[96] und die Anzahl der Litra 12. Aufgabe. Jemand kauft je $^4/_7$ L. für 1 P., verkauft sie je $^5/_9$ L. für 1 P. und verdient 1 P. Wieviel zahlte er? Es ist bekannt, dass $^4/_7$ mehr ist als $^5/_9$. Der Nenner ist 63, $^5/_9$ davon sind 35 und $^4/_7$ sind 36. Du kannst die Probe damit machen. Da er $^4/_7$ L. für 1 P. gekauft hat und sein Geld (für den Einkauf) 35 P. beträgt, hat er also 20 L. Mache daraus Neuntel, sind's 180, dividiere diese Zahl mit 5, weil er $^5/_9$ für 1 P. verkauft hat, so erhältst Du 36. Hätte man gesagt, er habe 2 P. verdient, so multipliziere sie mit 35, sind's 70. Hätte man 3 P. gesagt, so multipliziere man 35 mit 3 u. s w. bis ans Ende aller Zahlen. Aufgabe. Jemand kauft je $^9/_{17}$ L. für 1 P, verkauft sie je $^{10}/_{19}$ L. für 1 P. und verdient 1 P. Wieviel zahlte er? Suche den Nenner; der ist 323. Wie bekannt, ist $^9/_{17} = 171$ und $^{10}/_{19} = 170$, soviel betrug sein Geld. Die Anzahl der Litra ist 90.

Folgendes über Subtraktion ist leicht, wenn Du einen Nenner für beide Brüche hast. Zum Nenner machst Du ein

Ganzes. Beispiel. Wir wollen $^4/_9$ von $^5/_7$ subtrahieren. Der Nenner ist 63, $^5/_7$ davon = 45, und $^4/_9$ davon = 28. Wir subtrahieren 28 von 45, bleiben 17 übrig. Nun wollen wir wieder von der Methode der Astronomie reden. Merke auf, dass Du ihre Wege verstehst; denn Ptolemäus („Talmi")[97] und seine Genossen haben den Weg zu den Wurzeln von Quadratzahlen nur auf ihrer Grundlage gefunden. Wisse, dass der Mensch alles Kreisförmige und nicht Kreisförmige teilen kann[98] in so viele Teile, wie er will, je nach Wunsch und Bedürfnis. Nun haben die Arithmetiker keine kleine Zahl gefunden, die viele Teile und als solche Ganze hat, nur 12, denn dies hat eine Hälfte, ein Drittel, ein Viertel, ein Sechstel und ein Zwölftel (eig. ein halbes Sechstel). Das kommt daher, weil es keine Zahl, kleiner als diese, giebt, deren Faktoren zusammengenommen mehr betragen als sie selbst, nur sie allein, denn ihre Faktoren fügen zu ihr selbst ein Drittel hinzu (6 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16). Die entsprechende Zahl unter den Zehnern ist 120; deren Faktoren zusammen sind das Doppelte der Zahl, weder mehr noch weniger. Darum haben die Astronomen die Himmelskugel in 12 Teile (Sternbilder) geteilt und haben jedes Sternbild nach der Form der höchsten Sterne benannt, die nahe der Himmelsperipherie der Sternbilder sind. Noch ein Grund war, weil sie fanden, dass im Sonnenjahr der Mond 12 mal sich erneut. Sie teilten die Himmelskugel in 360 Teile, weil diese Zahl nahezu gleich den Tagen des Sonnenjahres ist, und es keine Zahl, kleiner als diese, giebt, die alle Teile (als Ganze) hat, die der Mensch „aussprechen" kann, ausser dem Siebentel. Wenn man daher diese Zahl mit 7 multipliziert, das giebt 2520, so hat diese Zahl alle Teile. Oftmals brauchen die Arithmetiker dieselbe, z. B. wenn man sagt: Wir haben zu einer Zahl alle ihre Teile von der Hälfte bis zum Zehntel addiert; welches ist das Verhältnis der (erhaltenen) Zahl zu jener? Dann denkt man sich, diese ganze umfassende Zahl sei 1 Ganzes. Teilen wir die Himmelskugel in 12 Teile, so kommt auf 1 Sternbild 30 Grade, und es giebt keine Zahl, kleiner als diese,

45		63	
28	5		4
17	7		9

die so viele (ganze) Teile hat, denn sie hat eine Hälfte, ein Drittel, ein Fünftel, ein Sechstel und ein Zehntel. Da sie kein Viertel hat, hat man diese Zahl verdoppelt, ist 60. Darum teilte man jeden Grad damit (mit 60), also in Sechzigstel, und nannte diese Teile „Minuten" („Erstel") und teilte jede Minute in 60 Teile und nannte diese „Sekunden". Ebenso teilte man jede Sekunde in 60 Teile und nannte, was herauskommt, „Terzen". So verfährt man bis 10, jedes in Sechzigstel (zu teilen), und noch weiter, wenn es nötig ist.

Nun müssen wir davon sprechen, wie man diese mit einander multipliziert. Die Grade betrachte immer als ganze Einer. Multiplizierst Du also Grade mit Graden, so ist das Produkt Grade. Das Produkt von Graden mal Minuten ist Minuten, mal Sekunden ist Sekunden, überhaupt bleibt bei Multiplikation von Graden mit irgend einer andern Art diese selbige Art. Bei der Multiplikation von Minuten mit Minuten ist das Produkt Sekunden, von Minuten mit Sekunden ist das Produkt Terzen und so bei allen Arten. Bei der Multiplikation von Sekunden mit Sekunden ist das Produkt „Quarten", mit Terzen „Quinten"; das Produkt von Terzen mit Terzen ist „Sexten", und so ist das Produkt von Terzen mit Quarten „Septimen" und von Quinten mit Quinten oder von Terzen mit Septimen „Decimen".[99] Nun will ich Dir zwei richtige Methoden dafür geben; die eine vermittelst der Schrift: Du setzest die Grade in die erste Stelle, die Minuten in die zweite Stelle und so fort alle Brüche nach einander. Dieses Niederschreiben ist entgegengesetzt unserem Verfahren bei der Multiplikation von Ganzen, denn die kleinste Zahl steht zuerst. Hast Du keine Grade, so schreibe eine Null in die erste Stelle, hast Du keine Minuten, so schreibe an deren Platz auch eine Null, und so machst Du es bei der Stelle eines jeden Bruches, wenn noch ein kleinerer Bruch dahinter folgt. Bei dieser Methode kannst Du wissen, in welcher Stelle der Brüche irgend ein beliebiger Bruch stehen wird. Verfahre wie bei Ganzen, nur musst Du darauf achten, dass Du einen senkrechten Strich zwischen alle Arten von Brüchen setzest.

Sind bei irgend einer Art von den Brüchen 2 Ziffern, z. B. 22, so musst Du, wenn Du sie hinschreibst, es so machen wie hier: Setze sie der Breite nach zwischen die beiden Striche gemäss ihrer Stelle, wie Du es bei Ganzen machst.

Sexten ('''''')	Quinten (''''')	Quarten ('''')	Terzen (''')	Sekunden ('')	Minuten (')	Grade (°)
			3	4	9	2
			11	44	18	3
			22	88	36	6
		99	396	162	27	
	44	176	72	12		
33	132	54	9			
33	176	329 2	499 5	262 8	63 4	6
33	56	31	24	30	7	7

Wir haben also bereits zwischen den Brüchen Striche gezogen und kamen bis Terzen für die oberen Reihen und ebenso für die unteren. Multiplizieren wir die oberen Reihen mit den unteren, so kommt als ihr Produkt die darunter stehende Zahl heraus[100] (s. vorletzte Reihe). Wir dividieren jede Stelle mit 60, addieren den Quotienten zu dem, was in der vorhergehenden Stelle steht, und schreiben den Rest besonders. So verfahren wir mit einer jeden Stelle, bis wir zu den Graden kommen, die gleichsam die Ganzen sind. So bleiben also übrig von Sexten 33, von Quinten 56, von Quarten 31, von Terzen 24, von Sekunden 30, von Minuten 7 und von Graden ebenfalls 7.

Die zweite Methode ist eine mündliche: Du addierst die beiden Brüche (d. h. die beiden Bruchreihen) einen jeden unter sich, indem Du die Stufen der Brüche addierst, wie wir nach der Methode der Arithmetiker verfahren sind. Wir verwandeln also die oberen Reihen in Terzen, so kommt folgende Zahl heraus: 464 643. Ebenso machen wir's mit den unteren, so kommt folgende Zahl heraus: 715 451. Wir multiplizieren nun die eine mit der anderen, so kommt folgende Zahl heraus: 332 429 298 993; dieselbe hat 12 Reihen (Stellen). Dies sind Sexten; wir dividieren also mit 60 und erhalten folgende Quinten: 5 540 488 316, 33 Sexten bleiben bei der ersten Zahl übrig. So verfahren wir der Reihe nach, so wird die

Zahl, die zuletzt herauskommt, und was von einer jeden Stelle übrig bleibt, gleich sein der Zahl bei der ersten Methode. Ich musste die Methode mit diesen Brüchen, Minuten bis Terzen, zeigen, denn mit dieser Methode berechnete König Ptolemäus[101] die Sehnen der Kreisbogen, bis er sie auf Quinten brachte. Diese geben durch Multiplikation Decimen. Ferner that er all dies, um die Wurzeln der Quadratzahlen zu berechnen, die keine wirklich richtige (rationelle) Wurzel haben. sondern die man nur annähernd an die Wahrheit berechnen kann, denn es bleiben bei der Division des Produkts (Quadrat des Zählers) weder Minuten, noch Sekunden übrig, nicht einmal Terzen, wie ich in Pforte VII erläutern werde. Merke Dir, dass es in jeder Wissenschaft Dinge giebt, die den Augen aller früheren Weisen und auch aller auf sie folgenden verborgen bleiben, wie die Wurzeln der Zahlen, die nicht Quadrat-Zahlen sind, in der Arithmetik, ebenso in der Geometrie, die Peripherie aus einem bekannten Durchmesser zu berechnen. Der weise Archimedes[102] konnte sie nicht der Wahrheit nahe bringen, sondern er gab nur Beweise aus der Geometrie, dass die Peripherie dreimal so gross sein müsse als der Durchmesser und noch $^{10}/_{70}$ in erster Stelle, und brachte Beweise, dass noch von einem dieser Teile Sekunden abzuziehen seien, wusste aber nicht, wieviele, sondern bewies nur, dass der Überschuss mehr sein müsse als $\frac{10}{70^1/_2}$[103]. König Ptolemäus erfasste den mittleren Weg und sagte daher, dass der Ueberschuss $^8/_{63}$ und noch 30 Sekunden betrage[104]. Am Ende von Pforte VII werden wir davon sprechen. So auch in der Naturwissenschaft; da haben die Weisen auf dem Wege des Versuchs Eigenschaften an Kräutern, Steinen, an den Gelenken des menschlichen Körpers gefunden, die wahr sind, aber keiner von ihnen weiss, warum das so ist, nur der allein erhabene Gott, gelobt sei er.

Pforte VI,

d. i. die Pforte der Proportion.

Die verschiedenen Proportionen zerfallen in 3 Arten: erstens die arithmetischen Proportionen. Diese sind der Reihe nach z. B. 1, 2, 3; aus weniger als 3 Zahlen kann keine Proportion bestehen; oder 2, 4, 6 oder 3, 6, 9. Dies bedeutet, dass sie alle in gleichem Verhältnis stehen, nämlich soviel wie 4 mehr ist als 2, soviel ist 6 mehr als 4. Eine zweite (Art von) Proportion sind die geometrischen Proportionen, z. B. 4, 6, 9, denn 4 : 6 = 6 : 9. Ebenso ist das Produkt der kleinen Zahl mit der grossen gleich dem Produkt der mittleren mit sich selbst, d. h. ihrem Quadrate. Merke Dir, dass diese 3 Zahlen gleichsam 4 (Zahlen) sind, denn die mittleren werden als eine Zahl angesehen.[105] Darum ist immer bei 4 Zahlen, bei welchen das Verhältnis der ersten zur zweiten gleich dem Verhältnis der dritten zur vierten ist, wenn Du die Quadrate aller vier addierst und Du weisst, wieviel herauskommt, und die erste zur vierten addierst, das Quadrat der Summe nimmst und das Quadrat der Differenz zwischen der zweiten und dritten dazu addierst, dies gleich dem, was zuerst herauskam.[106] Ebenso wenn Du die zweite und dritte addierst, das Quadrat der Summe nimmst und dazu das Quadrat der Differenz zwischen der ersten und vierten addierst, ist das Resultat gleich dem ersten.[107] Beispiel. 4 : 6 = 8 : 12. Ihre Quadrate betragen 260; die Summe der ersten und vierten (Zahl) ist 16, ihr Quadrat 256, die Differenz zwischen 6 und 8 ist 2, ihr Quadrat 4, also ist die Zahl dieselbe. Ebenso ist die Summe der zweiten und dritten (Zahl) 14, ihr Quadrat 196, die Differenz zwischen der ersten und vierten 8, ihr Quadrat 64, also ist die Zahl dieselbe. Merke Dir, dass der grösste Teil der Astronomie und die Bestimmung[108] der Stellung der Planeten von der Wissenschaft der geometrischen Proportionen abhängen und ebenso die meisten arithmetischen Aufgaben. — Die dritte Art sind die Proportionen der Musik. Diese ist eine herrliche Wissenschaft, ihre Proportionen sind zusammengesetzt aus arithmetischen und geometrischen Proportionen, denn immer verhält sich da das Verhältnis[109] zwischen erster und mittlerer (Zahl) zum Verhältnis zwischen mittlerer und letzter wie die erste Zahl zur letzten Zahl[110]. Beispiel. 2, 3, 6. Wie wir wissen, ist das (arithmetische) Verhältnis zwischen 2 und 3 = 1 und das Verhältnis zwischen 3 und 6 = 3, ebenso verhält sich (geometrisch) 2 : 6. Anderes Beispiel. 3, 4, 6 oder, wenn Du willst, 20, 30, 60. Das Verhältnis zwischen 3 und 4 ist 1 und das Verhältnis zwischen 4 und 6 = 2, also doppelt so gross, ebenso verhält sich 6 : 3. Wenn Du also zwei Zahlen kennst, kannst Du die dritte berechnen. Kennst Du die erste und zweite und kennst die dritte nicht, so multipliziere die erste mit der zweiten und das Produkt dividiere mit der ersten, nachdem Du davon, nämlich von der ersten, die Differenz zwischen ihr und der zweiten abgezogen hast. Erstes Beispiel. Wir multiplizieren 2 mit 3 und dividieren das Produkt mit der ersten (Zahl), nachdem wir von derselben die Differenz zwischen der ersten und zweiten, d. i. 1, abgezogen haben, giebt also 6; dies ist die dritte. Bei dem zweiten Beispiel ist das Produkt von 3 × 4 = 12 und die Differenz zwischen 3 und 4 = 1, diese subtrahieren wir von 3, der ersten (Zahl), bleiben 2 übrig; wir dividieren 12 damit, giebt 6; das ist die dritte. Ferner können wir sagen: Kennen wir die zweite und dritte (Zahl) und die erste nicht, so multiplizieren wir diese bekannten (Zahlen), die zweite und dritte, mit einander und dividieren das Produkt mit der Summe aus der dritten Zahl und der Differenz zwischen der zweiten und dritten, so ist der Quotient die erste (Zahl). Im ersten Beispiel also multiplizieren wir 3 mit 6, ist das Produkt 18. Die Differenz zwischen der zweiten und dritten (Zahl) ist 3, diese addieren wir zu 6, ist 9, dividieren 18 damit, giebt 2; dies ist die erste (Zahl). Im zweiten Beispiel multiplizieren wir 4 mit 6, ist 24, dividieren diese mit 8, — dies ist nämlich die dritte Zahl vermehrt um die Differenz zwischen der zweiten und dritten, — so kommen 3 heraus; dies ist die erste (Zahl). Kennen wir die mittlere nicht und wollen sie wissen, so multiplizieren wir die erste mit der dritten und dividieren das Produkt mit der Summe der beiden Zahlen; den Quotient verdoppeln wir, so ist dies die mittlere Zahl. Erstes Beispiel. Wir multiplizieren 2 mit 6, giebt 12, dividieren mit 8, der Summe beider, so ist der Quotient $1\frac{1}{2}$, diesen verdoppeln wir, giebt 3; soviel beträgt die zweite (Zahl). In dem andern Beispiel multiplizieren wir 3 mit 6, giebt 18, dividieren mit 9, der Summe beider, giebt 2, verdoppeln dies, ist 4; dies ist die zweite Zahl, welche gesucht war. So auch bei den geometrischen Proportionen: Kennen wir eine (Zahl) von den vier nicht, so können wir sie aus den 3 berechnen. Immer setzen wir die beiden Eckzahlen, die erste und vierte, zusammen. Wissen wir nun eine von den Eckzahlen nicht, welche es auch sei, so multiplizieren wir die eine mittlere mit der anderen und dividieren das Produkt mit der einen bekannten von den Eckzahlen, so ist der Quotient die gesuchte (Zahl). Wissen wir eine von den mittleren nicht, so multiplizieren wir die eine von den Eckzahlen mit der anderen und dividieren das Produkt mit der bekannten mittleren; so wird die gesuchte (Zahl) gefunden.

In dieser Weise verfährst Du bei allen Aufgaben; nur musst Du achten, an welche Stelle Du die Null[111] setzen sollst. Jetzt will ich Dir viele Aufgaben herschreiben, um Dich zu üben. Aufgabe. Wir haben das Fünftel, Sechstel und Siebentel von einer Zahl addiert; dies ergab 10. Wie gross ist die Zahl? Wir suchen den Nenner, indem wir 5 mit 6 multiplizieren, ist 30, und dies mit 7, ist 210; dies ist der Nenner. Ein Fünftel davon ist 42, ein Sechstel 35 und ein Siebentel 30, alle drei zusammen also 107; folglich ist das Verhältnis der Zahl, die im ganzen 10 beträgt, zur ganzen Zahl, die nicht bekannt ist, gleich dem Verhälnis von 107 zu 210, dem Nenner. Wir machen also das Schema so:[112]

$\begin{matrix} 10 & 0 \\ 107 & 210 \end{matrix}$. Wir multiplizieren die Eckzahlen mit einander, d. i. $10 \times 210 = 2100$. Würden wir (das Schema) umgekehrt machen, so würde das gleich sein; wie hier: $\begin{matrix} 107 & 210 \\ 10 & 0 \end{matrix}$. Wir dividieren (die 2100) mit der mittleren (Zahl), d. i. 107, so kommen 19 Ganze heraus und $^{67}/_{107}$ bleiben übrig. Dies ist die ganze Zahl. Wir wollen die Probe damit machen. Ein Fünftel von 15 ist 3, bleiben noch 4 Ganze, deren Fünftel wir nicht genommen haben. Wir machen aus jedem 107 und addieren zur Summe 67, so ist alles zusammen 495, ein Fünftel davon ist 99. Ein Sechstel von 18 ist 3, für das 1 übrig Bleibende rechnen wir 107 und addieren dazu 67, ist 174 und ein Sechstel davon 29. Ein Siebentel ist 2 Ganze, bleiben noch 5 übrig, die kein Siebentel (in ganzer Zahl) haben, für jedes rechnen wir 107, ist 535, addieren dazu 67, giebt 602 und ein Siebentel davon 86. Addieren wir die Bruchteile, so sind es 2 Ganze; diese addieren wir zu den Ganzen, so giebt's 10. Anderes Beispiel. Wir haben (von einer Zahl) ihr Siebentel und Neuntel genommen; dies ergab 7.[113] Der Nenner ist 63, ein Siebentel und ein Neuntel (davon ist) zusammen 16, also ist das Schema so: $\begin{matrix} 16 & 63 \\ 7 & 0 \end{matrix}$. Wir erhalten daher als Zahl $27\,^{9}/_{16}$. Kehrt man die Frage um und sagt: Wir haben von der Zahl ihr Siebentel und Neuntel subtrahiert, und es blieben 7 übrig,[114] so verfahren wir mit den Nennern umgekehrt. Der Nenner ist derselbe, aber 16, das ist ein Siebentel und ein Neuntel (des Nenners), subtrahieren wir vom Nenner, so bleiben 47 übrig, dies schreiben wir ebenso hin $\begin{pmatrix} 47 & 63 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$. Wir multiplizieren 7 mit 63, ist 441, dividieren mit 47, giebt $9 + {}^{18}/_{47}$; dies ist die Zahl. Ein Siebentel (davon) ist nach der Weise, die ich Dir gezeigt habe, 1 Ganzes und 16 Bruchteile. Wir nehmen ein Neuntel, dies ist 1 Ganzes und 2 Bruchteile, bleiben also 7 Ganze übrig. Aufgabe. Von 4 Männern hat der erste 11 Denare, der zweite 13 D., der dritte 15 D. und der vierte 17 D. Sie verdienten 19 D. Wieviel bekommt ein jeder? Wir addieren die Summen all ihres Geldes, ist 56. Wie sich das Geld eines jeden zu 56 verhält, soviel nimmt er von den 19. Wir machen also (das Schema) so: $\begin{matrix}11 & 56\\ 0 & 19\end{matrix}$. Wir multiplizieren 11 mit 19, giebt 209 und dividieren dies durch 56, giebt 3 Ganze und 41 Bruchteile bleiben übrig. Ebenso machen wir's mit 13: $\begin{matrix}13 & 56\\ 0 & 19\end{matrix}$, giebt 247; diese dividieren wir mit 56, giebt 4 Ganze und 23 Bruchteile. Ebenso machen wir's mit 15: $\begin{matrix}15 & 56\\ 0 & 19\end{matrix}$, giebt 285; diese dividieren wir mit 56, giebt 5 Ganze und 5 Bruchteile. Mit 17 machen wir's ebenso: $\begin{matrix}17 & 56\\ 0 & 19\end{matrix}$, giebt 223; diese dividieren wir mit 56, giebt 5 Ganze und 43 Bruchteile. Addieren wir die Ganzen und diese Bruchteile, so kommen 19 Ganze heraus; denn diese Bruchteile sind Teile von 56. Eine andere Methode: Wir verwandeln den ganzen Gewinn in Paschute, indem wir die 19 Denare mit 12 multiplizieren, giebt 228. Diese dividieren wir mit 56, giebt 4 P. und $^4/_{56}$, denn jeder Paschut wird in 56 Teile geteilt, das giebt die Hälfte von $^1/_7$ P. Wir multiplizieren nun 11 mit 4, giebt 44 P. oder 3 D. 8 P. und 44 Bruchteile eines P. Ferner multiplizieren wir 13 mit der 4, giebt 52 P., das sind 4 D. 4 P., und 52 Bruchteile eines P. Ferner multiplizieren wir 15 mit 4, giebt 60 P. oder 5 D. und 60 Bruchteile; aus 56 nehmen wir 1 P. zusammen, so bleiben 4 Bruchteile. Ebenso multiplizieren wir 17 mit 4, giebt 68 P. oder 5. D. 8 P. und 68 Bruchteile; aus diesen nehmen wir 1 P. zusammen, bleiben 12 Bruchteile übrig. Addieren wir alle Bruchteile, so sind es 2 P.; addieren wir alle Paschute, so sind es 2 D. Addieren wir diese zu dem grossen Anteil, so sind es zusammen 19 D. Aufgabe. Ein Geldwechsler hat 3 Münzarten. Für einen Gulden (= goldenen Denar) bekommt man von der ersten 3 D., von der zweiten 4 D. und von der dritten 6 D. Nun kommt jemand und bittet den Wechsler, er möchte ihm für 1 Gulden von den

3 Münzarten geben, aber eine gleiche Anzahl von den wertvollen wie von den minder wertvollen. Suche eine Zahl, die ein Drittel, Viertel und Sechstel (in ganzen Zahlen) hat; dies ist 12, der Nenner. Die genannten Teile zusammen sind (davon) 9; diese sind 1 D. (= Gulden). Wir suchen das Verhältnis von 12 : 9,[115] dies ist = 1 $^1/_3$. Wir addieren also zu 12 P., oder 1 D., 4 P., $^1/_3$ eines Denars, so giebt das 16 P. Soviel bekam er von jeder Münzart. Die Probe hierfür ist leicht, denn die Verhältnisse werden schnell gefunden. Wir nehmen die Münzart mit 3 D. zur Grundlage. 16 P. von der Münzart mit 6 D. sind 8 P. von der Münzart mit 3 D., denn 6 ist das Doppelte von 3. Das giebt also zusammen 24 (P.). Es ist bekannt, dass das Verhältnis von 3 : 4 = $^3/_4$ ist, darum sind die eingewechselten 16 P. von der Münzart mit 4 D. = 12 P. von der Münzart mit 3 D. Das ist also (zusammen) 1 Denar (= Gulden) oder 3 D. von der einen Münzart. So kannst Du das, was er eingewechselt erhielt, auf irgend eine beliebige Münzart zurückführen; ich brauche also nicht weitläufig zu sein. Ein anderes Beispiel, das schwer ist, weil dafür nur schwer Verhältnisse (zu finden) sind; nämlich folgendes: Ein Geldwechsler hat 3 Münzarten; von der einen (bekommt man) für 1 Gulden (= goldenen Denar) 5 D., von der andern 7 D. und von der dritten 9 D. Jemand bringt nun einen Gulden und will gleichmässig die gleiche Anzahl von allen (Arten) für 1 G. erhalten.[116] Verfahre nach Vorschrift: multipliziere 5 mit 7, so ist das Produkt 35, und multipliziere dies mit 9, ist 315; das ist der Nenner. Ein Fünftel davon ist 63, ein Siebentel 45 und ein Neuntel 35. Addieren wir diese drei (Zahlen), so ist das 143. Dies ist 1 D.[117]. Wir dividieren den Nenner mit dieser Zahl, giebt 2 D., und $^{29}/_{143}$ bleiben übrig; soviel bekommt er von jeder Münzart. Die Probe hierfür ist wegen der Bruchteile schwer, ausser in der Weise, die ich Dir angeben werde. Wir beginnen die Probe damit, dass wir die genannte Anzahl von der Münzart mit 7 D. und von der Münzart mit 9 D. auf die Münzart mit 5 D. zurückführen.

Dies machen wir so: Wir verwandeln die Denare in Bruchteile von 143 und addieren dazu die (29) Bruchteile; das giebt 315, den Nenner. Nun wollen wir die Münzart mit 7 D. eintauschen in die mit 5 D. Wir multiplizieren daher 315 mit 5, ist 1575, dividieren dies mit 7, so sind das 225 Bruchteile der Münzart mit 5 D. Ebenso dividieren wir 1575 mit 9, um zu wissen, wieviel es von der zweiten Münzart sind, giebt 175. Addierst Du diese drei Zahlen von einer Münzart: 315 + 225 + 175, so ist alles zusammen 715. Dies dividieren wir mit 143, d. i. 1 D., so kommen gerade 5 D. (= 1 G.) heraus. Oder, wenn Du willst, rechne so: Wir hatten von der Münzart mit 5 D. bereits 2 D. und 29 Bruchteile. Tauschen wir diese Zahl von der Münzart mit 7 D. ein (in die Münzart mit 5 D.), so sind es 225 Bruchteile oder 1 D. und 82 Bruchteile, und von der Münzart mit 9 D. sind es (in der Münzart mit 5 D.) 175 (Bruchteile) oder 1 D. und 32 Bruchteile. Addieren wir alle Bruchteile, so sind es 143 oder 1 D.; also ergiebt sich dieselbe Zahl (5 D.). Nun verwandeln wir alles in die Münzart mit 7 D. Diese hatte bereits 315 Bruchteile, denn das war der Nenner. Wir wollen nun wissen, wie viele Bruchteile sie von der Münzart mit 5 D. hinzubekommt. Wir multiplizieren daher 315 mit 7, giebt 2205, dividieren mit 5, ist 441, dividieren dieselbe Zahl auch noch mit 9, so kommt 245 heraus. Addieren wir alle diese Bruchteile und dividieren die Summe mit 143, so erhalten wir 7 D. (= 1 Gulden). Nun verwandeln wir alles in die Münzart mit 9 D. Diese hat von ihrer eigenen Münzart 315 Bruchteile, denn das war der Nenner, also 2 Denare und 29 Bruchteile. Die 315 multiplizieren wir mit 9, ist 2835, diese Zahl dividieren wir mit 5, ist 567, und dividieren sie wegen der andern Münzart auch mit 7, ist 405. Addieren wir diese Bruchteile von den drei Münzarten, so sind es 1287; dividieren wir das mit 143, so sind es 9 ganze Denare (= 1 G.) Ebenso verfährst Du, wenn 4 Münzarten oder mehr da sind. Jetzt will ich Dir erklären, wohin Du die Null setzen sollst. Wir wollen also ein Schema machen. Aufgabe. Reuben mietete den Simon, dass er 17 Tage bei ihm arbeiten solle, dafür wolle er ihm 11 Paschute geben. Er arbeitete aber nur 9 Tage. Ohne Zweifel bekommt er in ebendemselben Verhältnis, in dem die Tage, die er gearbeitet hat, zu den Tagen stehen, auf welche die Bedingung lautete, von den 11 P. Wir setzen nun die Null an die erste Stelle, zu zweit die 11, zu dritt die 9 und zu viert die 17, also so: $\begin{matrix}0 & 11\\ 9 & 17\end{matrix}$. Wenn wir wollen, setzen wir die Null zu zweit und die 9 zu viert, indem wir so schreiben: $\begin{matrix}11 & 0\\ 17 & 9\end{matrix}$; denn so wie wir die grössere Zahl der Paschute zuerst gesetzt haben, so müssen wir bei der andern Zahl die grössere Zahl der Arbeitstage zu dritt, d. h. als erste von den beiden letzten, setzen. Wir können die Null auch zu dritt setzen, also so: $\begin{matrix}9 & 17\\ 0 & 11\end{matrix}$. Auch zu viert können wir die Null setzen, also so: $\begin{matrix}17 & 9\\ 11 & 0\end{matrix}$. Das bleibt sich alles gleich. Aufgabe. Reuben mietete den Simon, dass er ihm auf seinem Vieh 13 Mass Weizen einen Weg von 17 Mil fortschaffen und dafür 19 Paschute erhalten solle. Dieser schaffte nur 7 Mass einen Weg von 11 Mil fort; wieviel beträgt sein Lohn?[118] Du verfährst so: Du musst zweimal Proportionen aufstellen, anders kannst Du es nicht berechnen. Rechne also, er hätte die 7 Mass den ganzen bedungenen Weg, also 17 M., fortgeschafft, daher machst Du das Schema so: $\begin{matrix}7 & 13\\ 0 & 19\end{matrix}$. Wir multiplizieren die Eckzahlen 7 und 19 mit einander, ist 133, dividieren dies mit 13, giebt 10 Ganze und $^3/_{13}$ P. bleiben übrig. Da er die 7 Mass nur 11 Mil fortgeschafft hat, müssen wir noch eine andere Proportion und ein anderes Schema aufstellen, und zwar machen wir dies so: 11, 17, 0, 10 + $^3/_{13}$. Dies ist also das Schema: $\begin{matrix}11 & 17\\ 0 & 10\ 3\end{matrix}$.[119] Da wir die Eckzahlen multiplizieren, das Produkt mit 17 dividieren müssen und wir an vierter Stelle $^3/_{13}$ haben, so müssen wir für beide einen Nenner suchen. Diesen finden wir, indem wir 13 mit 17 multiplizieren, giebt 221; das ist der Nenner und ist eine ganze Einheit. $^3/_{13}$ sind nun also $= {}^{51}/_{221}$. Nun multiplizieren wir 11 mit 10, ist 110, ferner multiplizieren wir die 11 Ganzen mit den 51 Bruchteilen, giebt 561; diese dividieren wir mit der 221, welche die ganze Zahl vorstellt, so kommen 2 Ganze heraus, die wir zu 110 addieren, ist 112, und $^{119}/_{221}$ bleiben übrig. Wir dividieren 112 mit 17 Ganzen, giebt 6 ganze Paschute, und 10 ganze P. bleiben übrig. Diese verwandeln wir in 221tel und addieren dazu die 119 übrig gebliebenen, welche Bruchteile von 1 P. sind, denn dieser besteht aus 221 Bruchteilen, so erhalten wir 2329. Diese dividieren wir mit 17, giebt 137, also ist alles zusammen 6 ganze P. + $^{137}/_{221}$ P.[120] Aufgabe. Reuben mietete den Simon, dass er ihm in der Erde einen Graben in der Länge von 10 und in der Breite von 10 graben solle, dafür werde er ihm 17 Paschute geben. Simon grub nur einen Graben in der Länge von 5 und in der Breite von 5. Ohne Zweifel bekommt er den vierten Teil, weil $^1/_2 \times {}^1/_2 = {}^1/_4$ ist; denn hätte er die halbe Länge und die ganze Breite oder die halbe Breite und die ganze Länge gegraben, dann hätte er die Hälfte des Geldes bekommen. Hätte man aber so gefragt: Er hat mit ihm bedungen, dass er einen Graben in der Länge von 7, in der Breite von 6 und in der Tiefe von 5 graben solle; dafür werde er ihm 11 P. geben; er aber grub einen Graben in der Länge von 6, in der Breite von 5 und in der Tiefe von 4; wieviel Lohn bekommt er? — so brauchen wir Proportionen. Wir multiplizieren die erste Zahl, d. i. 7, mit 6, ist 42, diese multiplizieren wir mit 5, d. i. die Tiefe, so giebt das 210. Ebenso multiplizieren wir die zweite Zahl, d. i. 6, mit 5, ist 30, und diese multiplizieren wir mit 4, d. i. die Tiefe, ist 120. Nun machen wir das Schema der Proportion so: $\begin{matrix} 0 & 11 \\ 120 & 210 \end{matrix}$. Wir multiplizieren die bekannten Mittelglieder, giebt 1320, dividieren dies mit 210, so kommen 6 Ganze heraus, und 60, d. h. $^2/_7$

P., bleiben übrig. Aufgabe. Jemand verkauft 13 Mass Weizen für 23 Paschute. Wieviel Mass giebt er für 7 P.? Das Schema der Proportion machen wir in dieser Weise: $\begin{matrix}7 & 23\\ 0 & 13\end{matrix}$. Wir multiplizieren nun die Eckzahlen, welche bekannt sind, giebt 91; dies dividieren wir mit 23, giebt $3\frac{22}{23}$ Mass. Nun kehren wir noch die Aufgabe um und wollen wissen, für wieviel er 7 Mass giebt. Wir machen also das Schema so: $\begin{matrix}7 & 13\\ 0 & 23\end{matrix}$. Wir multiplizieren die Eckzahlen, giebt 161 und dividieren dies mit 13, so erhalten wir $12\frac{5}{13}$ P.

Aufgabe. Jemand schickt einen Eilboten aus, der an jedem Tage 29 Mil gehen soll. Nach 10 Tagen schickt er einen andern Eilboten ihm nach, der an jedem Tage 37 M. gehen soll. Wann wird er ihn einholen?[121] Wir berechnen durch Multiplikation die Mil, die er in 10 Tagen ging, das giebt 290, dividieren dies mit der Differenz der beiden Laufgeschwindigkeiten, d. h. 8, so erhalten wir $36\frac{1}{4}$ Tag. Aufgabe. Jemand ging von seiner Stadt nach einem fremden Lande und that das Gelübde, wenn ihm Gott sein Vermögen verdoppele, wolle er jeden Tag 2 Paschute fortgeben. Nach 4[122] Tagen war sein Vermögen verbraucht. Wieviel brachte er mit? In Wahrheit hatte er 2 P. weniger $\frac{1}{8}$ P. Aufgabe. Reuben geht am Morgen des ersten Neumondstages aus seiner Stadt, um seinem Bruder Simon nach dessen Stadt entgegen zu gehen. An ebendemselben Tage geht auch Simon aus seiner Stadt, um seinem Bruder Reuben nach dessen Stadt entgegen zu gehen. Die Entfernung zwischen beiden Städten beträgt 100 Mil. Reuben geht an 1 Tage 19 Mil. Simon geht an 1 Tage 17 Mil. Wir fragen: Wann treffen sie sich?[123] Verfahre so: Addiere die beiden Tageswege, giebt 36, dividiere damit die 100 Mil, so erhalten wir 2 Tage, und $\frac{28}{36}$ Tag oder $\frac{7}{9}$ Tag bleiben übrig. Diese kannst Du in Stunden verwandeln mit Hilfe von Proportionen, und zwar machst Du das so: $\begin{matrix}0 & 12\\ 7 & 9\end{matrix}$. Wir multiplizieren 7 mit 12, giebt 84, und dividieren mit 9, giebt 9, und zwar Stunden, und 3, d. i. $^1/_3$ Stunde, bleibt übrig. Eine andere Methode: Wir wissen, dass das Verhältnis von $12 : 9$[124] $= {}^4/_3$ ist. Da wir Neuntel hatten, so nehmen wir für die $^7/_9$ $^7/_3$. Dividieren wir mit der 3 (in 7), so sind's $2^1/_3$ Stunden. Addieren wir diese zu 7, die wir hatten, so kommt dasselbe heraus. Wollen wir nun wissen, wieviel Mil Reuben gegangen ist, so ist er an den 2 Tagen, wie wir bereits wissen, 38 Mil gegangen. Ausserdem ist er, wie wir bereits gesagt haben, noch $^7/_9$ Tag gegangen, also stellen wir folgende Proportion auf: $\begin{matrix}7 & 9\\ 0 & 19\end{matrix}$. Wir multiplizieren 7 mit 19, giebt 133, und dividieren diese mit 9, giebt $14^7/_9$, also ist alles zusammen $52^7/_9$ Mil. **Aufgabe.** Jemand mietet drei Brüder, Reuben Simon und Lewi, dass sie 20 Tage vom Morgen bis zum Abend bei ihm arbeiten sollen, und zwar wer von ihnen wolle, nur solle die Arbeit nicht ruhen. Wenn Reuben die ganze Zeit arbeite, wolle er ihm 5 Gulden geben, wenn Simon, 4 G., und wenn Lewi, 3 G. Nun arbeiteten sie 20 Tage zusammen, und ein Aufseher sass bei ihnen, welcher aufschrieb, wieviel Stunden und Stundenteile des Tages ein jeder von ihnen arbeitete. Zuletzt nun gab er einem jeden von ihnen gleich viel. Wir wollen wissen, wieviel ein jeder bekam.[125] Wisse, dass Reuben für 1 Gulden 4 Tage arbeitet, Simon 5 T. und Lewi $6^2/_3$ T., alles zusammen $15^2/_3$. Dividieren wir 20 mit dieser Zahl, so kommt 1 Ganzes heraus, $4^1/_3$ bleiben übrig. Wegen des Drittels verwandeln wir alles in Drittel; aus den 20 T. machen wir $^{60}/_3$, aus den $15^2/_3$ $^{47}/_3$ und aus den $4^1/_3$ T. $^{13}/_3$. Es bekam also ein jeder 1 G. 13 P. von einer Münzart, bei welcher der Gulden 47 P. hat. Nun fragen wir, wieviel ein jeder bis nach Verlauf der 20 Tage arbeiten muss. Mit Lewi wollen wir anfangen. Für den Gulden, den er bekommen hat, muss er $6^2/_3$ T. arbeiten. Davon machen wir Drittel, sind 20, und wollen nun wissen, wieviel er für die 13 P., die er bekommen hat, arbeiten muss. Die Proportion stellen wir so auf: $\begin{matrix}13 & 47\\ 0 & 20\end{matrix}$. Wir multiplizieren 13 mit 20, ist 260, und dividieren dies mit 47, giebt 5, und 25 Bruchteile bleiben übrig. Wir addieren 5 zu den 20, sind $^{25}/_{3}$ und $^{25}/_{47}$ (Drittel). Wir dividieren diese Drittel mit 3, so kommen 8 Ganze heraus und 1 bleibt übrig. Dafür rechnen wir 4 Stunden, nämlich $^{1}/_{3}$ T., multiplizieren 25 mit 4, giebt 100, und dividieren dies mit 47, so kommen 2 Stunden heraus und 6 Bruchteile bleiben übrig, also hat Lewi 8 T. 6 Std. und 6 Bruchteile gearbeitet. Nun wollen wir wissen, wie lange Simon gearbeitet hat. Für den 1 Gulden muss er 5 T. oder $^{15}/_{3}$ T. arbeiten; wir wollen nun wissen, wieviel er für die 13 P., die er bekam, gearbeitet hat. Die Proportion stellen wir so auf: $\begin{matrix}13 & 47\\ 0 & 15\end{matrix}$. Wir multiplizieren 15 mit 13, giebt 195, diese dividieren wir mit 47, giebt 4, und 7 Bruchteile bleiben übrig. Wir addieren die 4 zu den 15, denn es sind Drittel, giebt $^{19}/_{3}$, dividieren diese (19) mit der 3, so sind's 6 ganze Tage. Für das 1 übrig Bleibende rechnen wir 4 Std. und multiplizieren 7 mit 4, sind 28, also giebt's 6 T. 4 Std. und 28 Bruchteile. So lange hat Simon gearbeitet. Nun wollen wir wissen, wie lange Reuben gearbeitet hat. Für den 1 Gulden hat er 4 T oder $^{12}/_{3}$ T. gearbeitet. Für die 13 P., die er bekommen hat, setzen wir die Proportion so an: $\begin{matrix}13 & 47\\ 0 & 12\end{matrix}$. Wir multiplizieren 13 mit 12, giebt 156, und dividieren diese mit 47, giebt 3, und 15 Bruchteile bleiben übrig. Diese 3 addieren wir zu den 12, die wir hatten, sind 15, d. h. Drittel, also hat er 5 T. gearbeitet. Ferner multiplizieren wir die 15 Bruchteile mit 4, giebt 60, und dividieren diese mit 47, so kommt 1 Std. heraus und 13 Bruchteile einer Stunde bleiben übrig. So lange hat Reuben gearbeitet. Addierst Du diese Bruchteile, so addiert sich aus ihnen 1 Stunde, weder mehr noch weniger. Addierst Du diese Stunde zu den genannten Stunden, so sind's 12 Stunden oder 1 Tag. Addierst Du den 1 T. zu den genannten Tagen, so sind's 20 T., weder mehr noch weniger. Aufgabe. Jemand hat 10 Mass Most. Diese will er kochen, so dass der dritte

Teil davon übrig bleibt. Nun fängt er an zu kochen, bis noch 8 Mass übrig waren. Da wurden 2 Mass vergossen. Nun will er (die übrigen 6 Mass) so kochen, das verhältnismässig ebensoviel, wie (er) zuerst (wollte), übrig bleiben.[126] Du hast drei bekannte Zahlen, erstens wieviel ein Drittel von 10 ist; es ist bekannt, dass dies $3\,{}^1/_3$ beträgt. Ferner ist bekannt, dass 8 die Zahl der Masse ist, die hätten gekocht werden sollen, und dann ist bekannt, dass 6 Mass übrig sind. Mache also das Schema so: $\begin{matrix} 6 & 3 \\ 0 & 3_{\frac{1}{3}} \end{matrix}$. Wir multiplizieren 6 mit $3\,{}^1/_3$, giebt 20, und dividieren diese mit 8, giebt $2\,{}^1/_2$. Anderes Beispiel. Wir hatten 9 Mass Most, und er will, dass sie so gekocht werden, dass der dritte Teil davon übrig bleibt. Es wurde nun gekocht, bis noch 6 Mass übrig waren. Da wurden 4 Mass vergossen, und 2 Mass blieben nur übrig. Das Schema ist so: $\begin{matrix} 2 & 6 \\ 0 & 3 \end{matrix}$. Wir multiplizieren 2 mit 3, giebt 6, also ist's 1. Das Gekochte muss also 1 Mass betragen. **Aufgabe.** Wir haben das Fünftel, Siebentel und Neuntel einer Zahl addiert und 10 erhalten. Wie gross ist die Zahl? Wir suchen den Nenner, der ist 315 und die genannten Teile betragen 143. Dividierst Du 315 mit 5, so kommen 63 heraus; dividierst Du mit 7, kommen 45 heraus, und mit 9, kommen 35 heraus; addiere das zusammen, so giebt das 143. Das Schema machen wir so: $\begin{matrix} 143 & 315 \\ 10 & 0 \end{matrix}$. Wir multiplizieren 315 mit 10, giebt 3150, und dividieren das mit 143, so kommen $22\,{}^4/_{143}$ heraus. Nun wollen wir umgekehrt verfahren: Wir haben von einer Zahl ihr Fünftel, Siebentel und Neuntel subtrahiert und 10 erhalten. Wir subtrahieren 143, — soviel betragen die Brüche, — von 315, dem Nenner, bleiben 172 übrig, und machen das Schema so: $\begin{matrix} 10 & 0 \\ 172 & 315 \end{matrix}$. Wir multiplizieren 10 mit 315, giebt 3150, und dividieren dies mit 172, so kommen $18\,{}^{54}/_{172}$ heraus. Wir nehmen ein Fünftel, ein Siebentel und ein Neuntel dieser Zahl fort, so bleiben uns 10 Ganze übrig. In dieser Weise ist auch die Aufgabe mit dem Baum (zu lösen): Derselbe steht ein Drittel im Wasser und ein Viertel in der Erde, über dem Wasser hat er noch 10 Ellen. Wie hoch ist der ganze Baum? Wir suchen eine Zahl, die ein Drittel und ein Viertel (in ganzen Zahlen) hat, das ist 12. Ein Drittel und ein Viertel davon ist zusammen 7. Diese subtrahieren wir von 12, bleiben 5 übrig. Die Proportion setzen wir so an: $\begin{matrix} 10 & 0 \\ 5 & 12 \end{matrix}$. Wir multiplizieren die Eckzahlen, giebt 120, und dividieren diese mit 5, giebt 24; dies ist die Höhe des Baumes. Ein Drittel davon ist 8, ein Viertel 6, zusammen 14; subtrahieren wir dies von 24, so bleiben 10 Ganze übrig, nicht weniger und nicht mehr. Anderes Beispiel. Von einem Baume steht ein Siebentel im Wasser und ein Neuntel in der Erde, über dem Wasser hat er noch 8 Ellen.[127] Der Nenner ist 63, davon subtrahieren wir 16, d. i. ein Siebentel und ein Neuntel, bleiben 47 übrig; also setzen wir die Proportion so an: $\begin{matrix} 8 & 0 \\ 47 & 63 \end{matrix}$. Wir multiplizieren die Eckzahlen, giebt 504, und dividieren diese mit 47, so kommen 10 Ganze und 34 Bruchteile heraus. Ein Siebentel dieser Zahl ist 1 Ganzes und 25 Bruchteile und ein Neuntel ist 1 Ganzes und 9 Bruchteile. Addieren wir die Bruchteile und das Genannte, so sind es 34 und 2 Ganze; diese subtrahieren wir von der genannten Zahl, so bleiben 8 übrig. Aufgabe. Jaakob stirbt, und sein Sohn Reuben zeigt eine Urkunde von zwei glaubwürdigen Zeugen vor, dass sein Vater Jaakob ihm allein sein ganzes Vermögen[128] vermacht und so am Sterbetage für den Fall des Todes verfügt habe. Sein Sohn Simon zeigt nun ebenfalls eine Urkunde vor, dass sein Vater für den Fall des Todes verfügt habe, dass ihm die Hälfte seines Vermögens gegeben werde. Ebenso zeigt Lewi eine Urkunde vor, dass sein Vater verfügt habe, ihm solle ein Drittel seines Vermögens gegeben werden. Auch Jehuda zeigt eine Urkunde vor, dass ihm ein Viertel seines Vermögens gegeben werde. Alle rühren von einem Tage und derselben Zeit und derselben Stunde in Jerusalem her, wo man die Stunden einschreibt.[129] Die Weisen Israels teilen das Vermögen nach Massgabe der Forderung eines jeden ein, die Weisen der andern Völker nach dem Verhältnis der von einem jeden beanspruchten Summe. Die Weisen der Arithmetik rechnen, als wäre das Vermögen = 1. Addierst Du dazu die Hälfte, ein Drittel und ein Viertel, so ist alles zusammen $2^{1}/_{12}$. Statt des 1 Ganzen setzen wir 60, was all die genannten Teile (in ganzen Zahlen) hat, so ist alles zusammen 125, oder wir setzen statt des 1 Ganzen 12 und statt der genannten Brüche 13. Welches von beiden Du auch nimmst, so kommt zuletzt die gleiche Zahl heraus. Nun wollen wir berechnen, wieviel Reuben nach Verhältnis seiner Fordernng bekommt. Wir setzen die Proportion also mit 60 an, denn er fordert das ganze Vermögen. Sagen wir, das Vermögen betrage 10 Denare oder 120 Paschute, so ist folgendes die Proportion für das Geld, welches Reuben bekommt: $\begin{matrix}60 & 0\\ 125 & 120\end{matrix}$. Wir multiplizieren die Eckzahlen, giebt 7200, und dividieren dies mit 125, giebt 57 P. und 75 Bruchteile. Dies ist Reubens Teil. Folgendes ist das Schema der Proportion für Simon: $\begin{matrix}30 & 0\\ 125 & 120\end{matrix}$. Wir multiplizieren die Eckzahlen und dividieren nach Vorschrift. Folgendes ist das Schema für den Anteil Lewi's: $\begin{matrix}20 & 0\\ 125 & 120\end{matrix}$. Wir multiplizieren und dividieren nach Vorschrift. Folgendes ist das Schema für den Anteil Jehuda's: $\begin{matrix}15 & 0\\ 125 & 120\end{matrix}$. Eine andere Methode, die kürzer ist: Simon nimmt halb so viel als Reuben's Anteil ist, ebenso nimmt Lewi den dritten Teil von Reuben's Anteil, und Jehuda nimmt den vierten Teil von Reuben's Anteil. Addierst Du alle diese Bruchteile und die Ganzen, so sind's 120 Paschute oder 10 Denare. Nach israelitischem Verfahren[130] sagen die drei älteren Brüder zu ihrem Bruder Jehuda: Du erhebst doch nur Anspruch auf 30 P., und ein jeder von uns hat an diesen gleichen Anspruch, nimm also $7^{1}/_{2}$, den vierten

Teil, und geh' von uns. Ebensoviel bekommt ein jeder von den drei Brüdern. Ferner sagt Reuben zu Lewi: Du erhebst doch nur Anspruch auf 40 P. Von den 30, auf die wir alle vier Anspruch erhoben haben, hast Du doch Deinen Anteil bereits bekommen, nimm also noch den dritten Teil von den 10, dem vierten Teil von 40, und geh' von uns. Also beträgt der Anteil Lewi's $10^5/_6$; denn das $^1/_2$ von den $7^1/_2$, die er bereits bekommen hatte, ist $^3/_6$, und das $^1/_3$ von den 10 her ist $^2/_6$, also zusammen $^5/_6$. Ebenso sagt Reuben zu Simon: Du erhebst doch nur Anspruch auf die Hälfte des Vermögens, d. h. auf 60, und die andere Hälfte gehört ganz mir. Von 40 hast Du bereits Deinen Anteil bekommen, also bleibt doch nur zwischen mir und Dir ein Anspruch auf 20, nimm also die Hälfte davon und geh' von mir. So ist also der Anteil Simon's $20^5/_6$ P. und der Anteil Reuben's $80^5/_6$ P. Addierst Du diese Bruchteile, so erhalten wir 10 Denare.

Nun will ich Dir die Methode der Astronomen in den Tabellenschriften für die Bestimmung[131] der Planeten erklären. Bei der Bestimmung des Mondes und bei[132] der Bestimmung von 5 Planeten giebt es eine Reihe (Rubrik), welche die Proportionsreihe[133] genannt wird. Diese (dort stehende) Proportionszahl muss zu 60 in Verhältnis gesetzt werden. Steht in der Proportionsreihe eine 60, so nimmt man alles, was in der darauf folgenden Reihe, welche „fünfte" Reihe genannt wird, oder was in der „siebenten" Reihe steht, sei es dass es nur Minuten sind oder Minuten und Grade. Ebenso ist es bei der Bestimmung der Stellung des Mondes. Steht weniger als 60 da, so nimmt man von den Bruchteilen, die in der fünften oder siebenten Reihe stehen, nach Verhältnis. Beispiel. Es stehen da 40 Bruchteile, welche überschüssig sind über die Grade, und in der Proportionsreihe steht 15. Du musst also 15 mit 40 multiplizieren und das Produkt mit 60 dividieren, dies ist die gesuchte Zahl. Mache also das Proportionsschema so: $\begin{matrix}15 & 60\\ 0 & 40\end{matrix}$. Multipliziere 15 mit 40, giebt 600, und dividiere dies mit 60, giebt 10 Bruchteile. Näherliegend wäre es, dass Du berechnest, wieviel das Verhältnis von 40 : 60 **beträgt,** dies ist $^2/_3$; dasselbe Verhältnis nimm von 15, so **hast Du** 10. Oder berechne, wieviel das Verhältnis von 15 : 60 beträgt, dies ist $^1/_4$; nimm also $^1/_4$ von 40; so ist das 10. Anderes Beispiel. Die eine Zahl ist 30 und die andere 45. Das Verhältnis von 45 : 60 beträgt $^3/_4$. Wir nehmen also $^3/_4$ von 30, giebt 22 und noch $^1/_2$ oder 30 Sekunden. Oder wir nehmen das Verhältnis von 30, dies ist $^1/_2$ von 60, und nehmen ebenso die Hälfte von 45, giebt $22^1/_2$. Beispiel für zwei Zahlen, von welchen die eine ein (in einem anderen Bruche ausdrückbares) Verhältnis hat, die andere nicht. Die eine Zahl ist 20, die andere 33. Das Verhältnis von 20 : 60 beträgt $^1/_3$. Wir nehmen also $^1/_3$ von 33, giebt 11 Minuten. Dasselbe kommt auf dem Wege der Multiplikation heraus, wenn Du 20 mit 33 multiplizierst und das Produkt mit 60 dividierst, so ist der Quotient 11. Da 33 der Hälfte von 60 nahe kommt, so nehmen wir auch davon das Verhältnis, giebt 10 Minuten, die Hälfte von 20. Da wir noch 3 mehr als die Hälfte haben, so multiplizieren wir 3 mit 20, giebt 60. Dies sind ohne Zweifel Sekunden, denn Minuten mal Minuten giebt Sekunden, weil $1 + 1 = 2$ ist.[134] Es sind also 60 Sekunden oder 1 Minute. Addieren wir diese zu den 10, so giebt es 11. Anderes Beispiel. Die eine Zahl ist 20, die andere 28. Das Verhältnis von 20 : 60 ist $^1/_3$, $^1/_3$ von 28 ist 9 Minuten 20 Sekunden. Ferner rechnen wir, 28 wäre die Hälfte von 60, weil es nahe daran ist. Die Hälfte von 20 ist 10. Dafür dass 2 an der Hälfte fehlen, multiplizieren wir 2 mit 20, giebt 40 Sekunden, und subtrahieren dies von einer Minute, so bleiben 9 Minuten 20 Sekunden übrig. Ein Beispiel, wo man das Verhältnis vermindern muss: Die eine Zahl ist 14, die andere 29. Wir nehmen also das Verhältnis von 29, rechnen aber, es wäre die Hälfte von 60, und nehmen die Hälfte von 14, das sind 7 Minuten. Dafür dass 1 an der Hälfte fehlt, multiplizieren wir dies mit 14, giebt 14 Sekunden, und subtrahieren diese von einer Minute, so bleiben 6 Minuten 46 Sekunden übrig. Ein anderes Beispiel, wo bei der einen Zahl zu subtrahieren, bei der andern zu addieren ist. Wir nehmen als die eine Zahl 18, als die andere 42 an. Wir nehmen also das Verhältnis von 42, rechnen aber, es wären $^{2}/_{3}$, und nehmen $^{2}/_{3}$ von 18 das sind 12. Dafür dass wir 2 mehr haben, multiplizieren wir diese mit 18, giebt 36 Sekunden. Ebensoviel würde auf dem Wege der Multiplikation herauskommen. Ebenso können wir das Verhältnis von 18 nehmen und rechnen, als wäre es $^{1}/_{3}$. Nun ist $^{1}/_{3}$ von 42 = 14. Dafür dass wir 2 zuviel genommen haben, multiplizieren wir diese mit 42, giebt 84 Sekunden oder 1 Minute 24 Sekunden. Subtrahieren wir dies von 14, so bleibt dieselbe Zahl wie zuerst übrig, nämlich 12 und 36 Sekunden. Wir können das Verhältnis auch von beiden so nehmen, dass wir nur zu addieren haben. Wir rechnen nämlich, als wäre 18 = $^{1}/_{4}$ von 60, und nehmen $^{1}/_{4}$ von 42, giebt 10 Minuten 30 Sekunden. Dafür dass wir 3 mehr haben, multiplizieren wir 42 mit 3, giebt 126 Sekunden oder 2 Minuten 6 Sekunden. Addieren wir dies zu der genannten Zahl, so sind's 12 Minuten 36 Sekunden. Würden wir rechnen, als wäre 42 = $^{3}/_{4}$, so würde es auch richtig herauskommen. — Folgende Regel will ich Dir noch sagen: Haben die in der Proportionsreihe stehenden Bruchteile kein (in einem andern Bruche ausdrückbares) Verhältnis (zu 60), so rechne wieder mit Hilfe der Multiplikation, wie ich's bei den Brüchen gesagt habe. Achte immer darauf, ob noch Bruchteile hinzukommen zu den Graden des „konstanten Mittelpunktes“.[135] Betragen diese weniger als 30, so lass sie fort, und nimm die Minuten, die in der Proportionsreihe gegenüber den Graden, die vorbei sind, stehen. Betragen die Bruchteile bei dem „konstanten Mittelpunkte“ mehr als 30, so füge 1 Grad zu den Graden, die vorbei sind, hinzu und nimm, was Du dafür in den Bruchteilen der Proportionsreihe findest, sei es dass es nach dem vollen Grade oder höher steht. Findest Du das „Konstante“ zwischen 4 Sternbildern und 8 Sternbildern und findest Du, dass ein Unterschied ist zwischen den Bruchteilen der Proportionsreihe gegenüber dem Grade, der vorbei ist, und zwischen den Bruchteilen der Proportionsreihe gegenüber dem hinzugekommenen Grade, — die Differenz zwischen ihnen wird immer höchstens 1 Minute betragen, — so rechne mit Hilfe der Multiplikation, so dass Du den Bruchteilen, die mehr sind als der Grad, der vorbei ist, von den Sekunden giebst, was ihnen zukommt. Dieses Verfahren brauchst Du bei der Bestimmung des „Maadim“ (Mars) oder des „Sonnengestirns“ (Merkur),[136] dagegen bei der Bestimmung des „Sabthaj“ (Saturn) und des „Zedek“ (Jupiter) brauchst Du es nicht, denn in der fünften Reihe und der siebenten Reihe stehen keine Grade, sondern nur Minuten.

Pforte VII,

das Ausziehen der Wurzeln betreffend.

Alle Zahlen kommen in dreierlei Art vor: erstens als Wurzeln, zweitens als Quadratzahlen, drittens weder als Wurzeln noch als Quadratzahlen.[137] Eine Quadratzahl ist das Produkt aus der Multiplikation einer Wurzel mit sich selbst, z. B. 9. Dies stellt ein Viereck vor, dessen Langseite gleich seiner Breitseite ist, und die Wurzel davon ist 3. Es giebt nun Zahlen, die gar keine wahre (rationelle) Wurzel haben, und zwar sind das die meisten, z. B. in der ersten Stelle 2, ebenso 3, 5, 6, 7 und 8. Das Quadrat von Ganzen ist immer grösser als die Wurzel; umgekehrt ist es bei den Quadraten von Brüchen, und zwar darum, weil bei der Multiplikation eines Bruches mit einem Bruche das Produkt kleiner ist als der multiplizierte Bruch. Die 1 allein ist zugleich Wurzel und Quadrat; denn sie steht zwischen den Brüchen und den Ganzen. Zuerst wollen wir nun die Probe angeben. Sieh' zu, wenn die Probezahl der „Quadratzahl“ nicht gleich dem Produkt der Probezahl der „Wurzel“ mit sich selbst ist, so ist die Zahl kein Quadrat; ist sie aber gleich, so kann sie ein Quadrat sein. Beispiel: Das Quadrat 144. Die Probezahl ist 9, die Wurzel ist 12 und deren Probezahl 3. Die Probezahl der Wurzel mit sich selbst multipliziert giebt 9. Eine andere Probe: Ist die Probezahl der Zahl eine 2, 3, 5, 6 oder 8, so ist sie kein Quadrat; ist die Probezahl aber eine von den Quadratzahlen der ersten Stelle, also 1, 4, 9, oder auch 7, so kann sie ein Quadrat sein. Eine andere Probe: Ist in der fraglichen Zahl die Ziffer der ersten Stelle eine 2, 3, 7 oder 8, so ist die Zahl kein Quadrat. Ist sie aber eine von den Quadratzahlen 1, 4, 9 oder von den wiederkehrenden Zahlen[138] 5 und 6, so kann die Zahl ein Quadrat sein. Eine andere Probe, die zuverlässig ist: Findest Du bei der fraglichen Zahl in der ersten Stelle eine 1, so wisse, dass in der Wurzel eine 1 oder 9 steht. Steht in der Zahl eine 4, so wisse, dass in der Wurzel eine 2 oder 8 steht. Steht in der Zahl eine 6, so wisse, dass in der Wurzel eine 4 oder 6 steht. Steht in der Zahl eine 9, so wisse, dass in der Wurzel eine 3 oder 7 steht. Steht in der Quadratzahl eine 5, so wisse, dass in der Wurzel eine 5 steht. Nun will ich Dir eine Methode angeben, nach der Du wissen kannst, welche von den beiden genannten (Zahlen) in der Wurzel steht. Merke Dir jetzt, dass es in der ersten Stelle 3 Quadratzahlen giebt, und zwar 1, 4 und 9, und in der zweiten Stelle 6, nämlich 16, 25, 36, 49, 64, 81. Für alle Stellen, die auf diese beiden folgen, gilt dieselbe Methode; die ungeraden Stellen richten sich nämlich nach der ersten Stelle, und die geraden Stellen richten sich nach der zweiten Stelle. Immer enthalten die Quadratzahlen, welche den Quadratzahlen in der ersten Stelle gleichen, 1 Ziffer,[139] und die, welche in der zweiten und jeder geraden Stelle stehen, sind ebenso wie alle ihnen gleichenden 2 Ziffern. Durch diese ähnlichen Quadrate kannst Du alle Quadratzahlen, die davor oder danach sind, bestimmen. Weisst Du die Wurzel der ersten Stelle oder der zweiten und willst die Wurzel der ähnlichen Zahl in irgend einer Stelle finden, so verfährst Du so: Merke Dir, was für die erste Stelle Einer sind, das sind für die dritte Stelle Zehner, für die fünfte Hunderter, für die siebente Tausender, für die neunte Zehntausender, für die elfte Hunderttausender und so mit Überspringen weiter bis ins Unendliche, indem man von der ungeraden Zahl zur ungeraden Zahl überspringt. Die Einer der Wurzeln für die zweite Stelle sind für die vierte Stelle Zehner, für die sechste Hunderter, für die achte Tausender, für die zehnte Zehntausender und für die zwölfte Hunderttausender, indem man immer von der geraden Zahl zur geraden Zahl überspringt. Nun will ich Dir sagen, wie Du verfährst, wenn Du das ähnliche Quadrat und dessen Wurzel kennst. Subtrahiere das Quadrat von der in Frage kommenden Zahl, nachdem Du darauf geachtet hast, dass Du immer nur das vorhergehende Quadrat nimmst, welches der Zahl zunächst ist, sieh' nach der Differenz zwischen dem Quadrat und Deiner Zahl und dividiere diese mit dem Doppelten der Wurzel des vorhergehenden Quadrats. Mache es aber so, dass Du dafür nicht alles giebst, was Du kannst, sondern lasse davon etwas übrig, damit Du noch das Quadrat des Quotienten davon nehmen kannst. Wenn Du nun siehst, dass die Differenz zwischen dem vorhergehenden Quadrat (und unserer Zahl) soviel beträgt wie der Quotient multipliziert mit dem Doppelten der vorhergehenden Wurzel vermehrt um das Quadrat des Quotienten, dann weisst Du, dass die Quadratzahl richtig ist. Ist die in Frage kommende Zahl kleiner als die ähnliche Quadratzahl,[140] so sieh' zu, wie gross die Differenz zwischen Deiner Zahl und der nachfolgenden Quadratzahl ist. Jetzt musst Du etwas mehr geben, als Du kannst, weil Deine Zahl dem ähnlichen Quadrate vorhergeht, wie ich noch erklären werde; behalte also in Deiner Zahl das Quadrat des Quotienten nicht zurück. Sieh' nun zu, wenn die Zahl soviel beträgt wie das Doppelte der Wurzel multipliziert (mit dem Quotienten), so weisst Du, dass Deine Zahl richtig ist. Kam 1 heraus, so subtrahiere von den Zehnern 1, dann bleiben 9 übrig. In dieser Weise kannst Du erkennen: wenn Du im Quadrat eine 1 oder eine 9 findest, dann muss sie in der Wurzel sein, wie Du an den Beispielen sehen wirst.

Beispiel. Wir wollen die 200 nächstvorhergehende Quadratzahl wissen. Diese steht in der dritten Stelle, also in einer ungeraden, folglich müssen wir sie mit Hilfe der ersten Stelle suchen. Wir haben bereits gesagt, dass die Quadratzahlen in derselben 1, 4 und 9 sind und die ihnen ähnlichen 100, 400 und 900. Also ist 100 die vorhergehende Quadratzahl und deren Wurzel ist 10; denn, wie wir bereits gesagt haben, was in der ersten Stelle Einer sind, sind für die dritte Stelle Zehner. Wir subtrahieren die Quadratzahl von unserer Zahl, bleiben 100 übrig. Wie wir bereits gesagt haben, ist die Wurzel 10, also ihr Doppeltes 20. Dividieren wir nun 100 mit 20 und geben dafür 5, so bliebe nichts übrig, wovon wir das Quadrat des Quotienten nehmen könnten; daher geben wir dafür 4. Mit 20 multipliziert sind's 80, bleiben also 20 übrig. Davon subtrahieren wir 16, das Quadrat des Quotienten, so bleiben 4 übrig. Diese subtrahieren wir von 200, bleiben 196 übrig; dies ist die nächste Quadratzahl zu 200. Wir addieren den Quotienten 4 zu der ersten Wurzel, d. i. 10, so sind es 14; dies ist in Wahrheit die Wurzel der Quadratzahl. Nun wollen wir vermittelst der „Probezahl" nach Vorschrift die Probe damit machen. Wie bekannt, ist von 14 die Probezahl 5; diese mit sich selbst multipliziert ist 25, also die Probezahl 7, ebenso ist sie bei 196. Eine andere Probe: Da die Probezahl 7 ist, kann es ein Quadrat sein. Eine andere Probe: Da eine wiederkehrende Zahl da steht, kann es ein Quadrat sein. Eine andere Probe: Da im Quadrat eine 6 steht, muss in der Wurzel eine 4 oder 6 stehen. Die Differenz zwischen der ähnlichen Quadratzahl beträgt 96. Das Doppelte der Wurzel der ähnlichen Quadratzahl ist 20; multiplizieren wir diese mit 4, so giebt's 80, addieren wir dazu das Quadrat von 4, d. i. 16, so giebt's 96, und das ist richtig. Anderes Beispiel in derselben Stelle. Wir wollen das Quadrat wissen, welches 300 zunächst ist. 300 ist näher zu 400, welches eine ähnliche Quadratzahl in dieser Stelle ist, als zu 100, der ersten Quadratzahl. Wir fassen die Differenz zwischen der nachfolgenden Quadratzahl ins Auge, dieselbe beträgt 100. Wir wissen, dass von 400 die Wurzel 20 ist, ihr Doppeltes also

40. Damit dividieren wir 100 und geben etwas mehr, als wir können, weil die Zahl dem Quadrat vorangeht. Geben wir 2, so bleibt 20 übrig, daher geben wir 3. Multiplizieren wir 3 mit 40, dem Doppelten der Wurzel, so ergiebt das 120; diese Zahl subtrahieren wir von 400, sind's 280, und addieren dazu das Quadrat von 3, d. i. 9, weil die Zahl dem ähnlichen Quadrat vorangeht, giebt 289; dies ist die Quadratzahl. Wir subtrahieren die 3 von 20, der Wurzel der ähnlichen Quadratzahl, so bleiben 17 übrig; das ist die Wurzel dieses Quadrats. Da im Quadrat eine 9 steht, so muss, wie bereits erklärt worden ist, in der Wurzel eine 7 stehen, eine 3 deshalb nicht, weil eine 3 nur dann in der Wurzel stehen kann, wenn die Zahl nahe der vorhergehenden ähnlichen Quadratzahl ist In derselben Weise erkennst Du es bei einem Quadrat, in dessen Wurzel eine 1 oder 9 stehen muss, aus der Entfernung von dem vorhergehenden und nachfolgenden ähnlichen Quadrate. Dadurch kannst Du auch, wenn Du im Quadrate eine 4 findest, unterscheiden, ob in der Wurzel eine 2 oder 8 steht, ebenso, wenn im Quadrate eine 6 steht, kannst Du erkennen, ob in der Wurzel eine 4 oder 6 stehen muss. Nun will ich Dir einigermassen das Geheimnis enthüllen, warum das so ist. Wisse, dass von den zwei grossen Umkreisungen[141] die eine nach Osten und die andere nach Westen geht und dass die obere Kraft die gleiche in beiden ist. So ist 1 das Quadrat von 1, ebenso ist im Quadrat von 9 eine 1, und so wie die Zahl 2 neben der 1 steht. so steht die Zahl 8 neben der 9 rückwärts, der Weg der einen ist ja entgegengesetzt dem Wege der andern, — und so ist 4 das Quadrat von 2 und ebenso ist im Quadrat von 8 eine 4. Ebenso verhält es sich mit der 3 und 7, 4 und 6. So bleibt nur 5 als mittlere Zahl übrig, daher dreht sie sich um sich selbst.[142] Die genannte Quadratzahl kannst Du auch nach der ersten Methode, die ich bei der Quadratzahl 196 angegeben habe, berechnen, indem du das Quadrat 100 von der gegebenen Zahl 300 subtrahierst; das giebt 200. Wie bekannt, ist 10 die Wurzel von 100, also das Doppelte 20.

Wir können 10 nicht dafür geben, weil dann keine Zahl übrig bliebe, von der wir das Quadrat des Quotienten subtrahieren könnten. Auch 9 können wir dafür nicht geben, weil ihr Quadrat zu gross ist, nicht einmal 8, weil deren Quadrat auch noch zu gross ist, also geben wir 7 dafür. Wir multiplizieren nun 7 mit 20, dem Doppelten der Wurzel, giebt 140, addieren dazu 100, die Quadratzahl, ist 240, und dazu addieren wir 49, das Quadrat des Quotienten, so erhalten wir 289, dies ist die Quadratzahl. Ferner addieren wir den Quotienten zu 10, welches die Wurzel war, so ist also die Wurzel dieses Quadrats 17. Ein Beispiel in der vierten Stelle. Wir wollen das Quadrat wissen, welches 1200 zunächst ist. Da dies eine gradstellige Zahl ist, so suchen wir in der zweiten Stelle die dieser ähnliche Zahl; das ist 12 und das vorhergehende Quadrat 9, ebenso hier 900. Sowie 3 die Wurzel von 9 ist, so ist von 900 die Wurzel 30, ihr Doppeltes 60. Wir subtrahieren nun von der gegebenen Zahl das vorhergehende Quadrat, so ist die Differenz 300, dies dividieren wir mit 60. 5 können wir wegen des Quadrats des Quotienten nicht dafür geben, also geben wir 4 dafür. Wir multiplizieren 4 mit 60, giebt 240, addieren dies zu dem vorhergehenden ähnlichen Quadrat, ist 1140, und addieren dazu auch das Quadrat des Quotienten, d. i. 16, so ist alles zusammen 1156; dies ist das Quadrat, welches der gegebenen Zahl zunächst ist. Da bei der Division 4 herauskam, so addieren wir diese zu der Wurzel des vorhergehenden ähnlichen Quadrats, welche 30 betrug, so ist 34 die Wurzel dieses Quadrats. Dieselbe erweist sich bei allen Proben als richtig. Anderes Beispiel in derselben Stelle. Wir suchen das Quadrat, welches 7500 zunächst ist Diese Zahl ist 75 ähnlich, denn sie gehört zu den gradstelligen. Diese ist 81 näher als 64; wie wir wissen, ist 9 die Wurzel von 81, ebenso ist 90 die Wurzel von 8100, ihr Doppeltes also 180. Die Differenz beträgt 600, wir geben dafür 4, obwohl es nicht voll ist, weil die gegebene Zahl vor dem ähnlichen Quadrate ist. Multiplizieren wir das Doppelte der Wurzel mit 4, so ist das Produkt 720. Diese Zahl subtrahieren wir von dem ähnlichen Produkt, so bleibt 7380 übrig, dazu addieren wir das Quadrat des Quotienten, d. i. 16, so ist alles zusammen 7396 und die Wurzel davon, wenn wir 4 subtrahieren, 86. Dies ist in Wahrheit die Quadratzahl; und auch wenn wir's nach der anderen Methode, die ich in den früheren Beispielen angegeben habe, machen, kommt das Gleiche heraus. Ein Beispiel in der fünften Stelle. Wir suchen das Quadrat, welches 23000 zunächst ist. Diese (Stelle) ist der ersten Stelle ähnlich, denn sie ist ungerade. 10000 ist der 1 ähnlich und, wie wir bereits gesagt haben, was in der ersten Stelle 1 ist, das ist für die fünfte Stelle 100. Das vorhergehende (ähnliche) Quadrat ist nun 10000, dies subtrahieren wir von der gegebenen Zahl, so bleiben 13000 übrig. Dies dividieren wir mit 200, dem Doppelten der Wurzel des vorhergehenden ähnlichen Quadrats. Wir geben dafür 50, addieren dies zu der früheren Wurzel, so sind's 150, und 3000 bleiben uns noch übrig. Davon subtrahieren wir 2500, das Quadrat des Quotienten, so bleiben 500 übrig. Diese dividieren wir mit 300, dem Doppelten der Wurzel, die wir zuletzt hatten, und geben dafür 1, so ist das Quadrat 22801 und die Wurzel 151. — Wenn bei der Multiplikation der Zahl Zehner herauskommen, so addiere die Zehner zu den Zehnern nach Massgabe der Stellen, und wenn Einer da sind, so setze sie an die Stelle der Einer, die Du multipliziert hast. Anderes Beispiel in derselben Stelle. Wir suchen das Quadrat, welches 85000 zunächst ist. Diese Zahl ist nahe dem ähnlichen Quadrat 90000, dessen Wurzel 300 ist. Die Differenz beträgt 5000, diese dividieren wir mit dem Doppelten der Wurzel, d. i. 600. Wir geben dafür 9, etwas mehr, als wir können, so kommen 400 mehr heraus. Diese subtrahieren wir von der gegebenen Zahl, so bleiben 84600 übrig. Addiert man hierzu 81, das Quadrat des Quotienten, so sind's 84681 Dies ist in Wahrheit das Quadrat, und die Wurzel davon ist 291. Ein Beispiel in der sechsten Stelle. Wir wollen das Quadrat wissen, welches 200000 zunächst ist. Da diese Stelle eine gerade ist, so gleicht die Zahl der 20 und das vorhergehende Quadrat ist 16. Wie wir bereits gesagt haben, was in der zweiten Stelle Einer sind, sind für die sechste Stelle Hunderter, also ist die Wurzel 400 und das vorhergehende Quadrat 160000. Die Differenz ist 40000; diese dividieren wir mit dem Doppelten der Wurzel, d. i. 800. 5 können wir wegen des Quadrates des Quotienten nicht dafür geben, also geben wir 4, d. h. 40, und multiplizieren diese Zahl mit 800, so kommen 32000 heraus, und 8000 bleiben übrig. Davon subtrahieren wir 1600, das Quadrat von 40, so bleiben 6400 übrig. Jetzt ist unsere Wurzel 440, ihr Doppeltes 880, damit dividieren wir die übrig gebliebene Zahl und geben dafür 7, so bleiben 240 übrig. Nun subtrahieren wir noch das Quadrat von 7, so bleiben 191 übrig. Diese Zahl subtrahieren wir von der gegebenen Zahl, so bleiben 199809 übrig; dies ist das Quadrat und die Wurzel 447. Anderes Beispiel in derselben Stelle: das Quadrat, welches 600000 zunächst ist, zu finden. Da das ähnliche Quadrat der Zahl folgt, so nehmen wir die Differenz, d. i. 40000, — 600000 ist der 60 ähnlich, — und wenn wir diese mit 1600 dividieren, geben wir dafür, soviel wir können, auch wenn in Wahrheit etwas dazu fehlt, dann subtrahieren wir dies von der Wurzel des ähnlichen Quadrats, d. i. 800, — diese ist der 8 ähnlich, — so ist die Wurzel 774. Wir haben also 41600 und hatten 40000, die Differenz, also haben wir nur 1600 von der gegebenen Zahl zu subtrahieren und das Quadrat des Quotienten 26, d. i. 676, zu ihr zu addieren. 600 hebt sich gegen 600, also haben wir nur 924 zu subtrahieren, denn 76 haben wir vom Quadrat des Quotienten zu addieren. Das Quadrat ist also 599076, und dies ist in Wahrheit das Quadrat. Ein Beispiel in der siebenten Stelle. Wir wollen das Quadrat wissen, welches 5000000 zunächst ist. Wir wollen dieses Beispiel ausführlich erklären, wie es sich gehört, damit es ein Muster sei, die Quadrate in den andern Stellen bis ins Unendliche zu berechnen, obwohl es für die Dinge der Wissenschaft nicht nötig ist. Diese Stelle ist der ersten ähnlich, und die in Frage kommende Zahl ist der 5 ähnlich. Wir subtrahieren nun das Quadrat 4000000, so bleibt uns 1000000 übrig. Unsere vorhergehende Wurzel ist 2000, ihr Doppeltes 4000, damit dividieren wir die übrig gebliebene Zahl, so giebt das 800000, und 200000 bleiben uns übrig. Davon subtrahieren wir das Quadrat des Quotienten, d. i. 40000, so bleibt uns 160000 übrig. Die Wurzel der früheren Zahl ist nun 2200, also ihr Doppeltes 4400, damit dividieren wir die übrig gebliebene Zahl, geben dafür 30, so bleiben uns 28000 übrig. Davon subtrahieren wir das Quadrat des diesmaligen Quotienten 30, d. i. 900, so bleiben 27100 übrig. Die bisherige Wurzel ist 2230, ihr Doppeltes 4460, damit dividieren wir die übrig gebliebene Zahl, so ist der Quotient 6, und 340 bleiben übrig. Davon subtrahieren wir 36, das Quadrat von 6, so bleibt 304 übrig. Dies subtrahieren wir von der gegebenen ersten Zahl, so bleiben 4999696 übrig. Dies ist in Wahrheit das Quadrat, und die Wurzel davon ist 2236. Prüfe dies mit allen Proben, so wirst Du es richtig finden. So z. B. mit Hilfe der Multiplikation der Wurzel mit sich selbst: 2000×2000 ist dasselbe, wie 2×2, in der siebenten Stelle, also 4000000, so bleibt uns noch die genannte Zahl übrig. Wir multiplizieren 2000 mit 2×200, so giebt das 800000, also sind noch 199696 übrig Wir multiplizieren nun wieder 2000 mit 2×30, giebt 120000, subtrahieren diese von der übrig gebliebenen Zahl, so bleiben noch 79696 übrig. Wir multiplizieren nun wieder 2000 mit 2×6, giebt 24000, subtrahieren diese von der übrig gebliebenen Zahl, so bleiben noch 55696 übrig. Nun haben wir 2000 bereits mit allen Ziffern multipliziert, jetzt wollen wir 200 mit sich selbst und mit den andern Ziffern, die auf sie folgen, multiplizieren. Mit sich selbst multipliziert giebt sie 40000, subtrahieren wir dies von der übrig gebliebenen Zahl, so bleiben noch 15696 übrig. Ferner multiplizieren wir 200 mit 2×30, giebt 12000, diese subtrahieren wir von der übrig gebliebenen Zahl, so bleiben noch 3696 übrig. Ferner multiplizieren wir 200 mit 2×6, giebt 2400, diese subtrahieren wir von der übrig gebliebenen Zahl, so bleiben noch 1296 übrig. Nun haben wir bereits 200 mit allen Ziffern, die auf sie folgen, multipliziert Jetzt beginnen wir mit der 30. Mit sich selbst multipliziert giebt sie 900; subtrahieren wir dies von der übrig gebliebenen [illegible], so bleiben noch 396 übrig. Ferner multiplizieren wir 30 mit 2×6, giebt 360, so bleiben 36 übrig, das Quadrat von 6; also ist die Zahl richtig.

Bevor ich nun von den Zahlen spreche, die keine Wurzel haben, will ich Dir eine Methode zeigen, wie Du viele Quadratzahlen aus **einer** Quadratzahl und ebenso viele Wurzeln aus **einer** Wurzel berechnen kannst. Merke Dir, dass die Multiplikation eines Quadrats mit einem Quadrat immer ein Quadrat ergiebt. Die Wurzel davon ist das Produkt der Multiplikation der Wurzel des einen Quadrats mit der Wurzel des andern Quadrats. **Beispiel.** Wir multiplizieren das Quadrat von 5 mit dem Quadrat von 9, das giebt 2025. Diese Zahl ist ein Quadrat; wir wollen wissen, wie gross die Wurzel ist. Wir multiplizieren 5 mit 9, so kommen 45 heraus; dies ist in Wahrheit die Wurzel. Das Verhältnis eines Quadrats zu einem Quadrat ist ebenfalls ein Quadrat. Dividierst Du das grössere mit dem kleineren, so findest Du seine Wurzel.

Beispiel. Wie gross ist das Verhältnis von 49 : 100? Dies ist $2\,{}^{2}/_{49}$ mal soviel als jenes. Von diesem Quadrate wollen wir die Wurzel wissen. Wir dividieren 10 mit 7, so kommt $1\,{}^{3}/_{7}$ heraus; dies ist die Wurzel. $1\times 1 = 1$; $2\times 1\times {}^{3}/_{7} = {}^{6}/_{7}$ und ${}^{3}/_{7}\times {}^{3}/_{7} = {}^{9}/_{49}$. Aus ${}^{7}/_{49}$ machen wir ${}^{1}/_{7}$ und addieren es zu den ${}^{6}/_{7}$, die wir hatten, so kommt 1 Ganzes heraus, also haben wir im Ganzen $2\,{}^{2}/_{49}$. — Wollen wir das Quadrat einer bekannten Zahl aus dem bekannten Quadrat einer bekannten Zahl berechnen, so dividieren wir die grössere bekannte Zahl mit der kleineren bekannten Zahl, deren Quadrat wir kennen, nehmen hiervon das Quadrat und multiplizieren es mit dem bekannten Quadrat, so ist das Produkt das Quadrat der grösseren Zahl, die wir kannten.[143] **Beispiel.** Wir wollen das Quadrat von 19 aus dem Quadrat von 7, d. i. 49, berechnen. Wir dividieren 19 mit 7, giebt $2\,{}^{5}/_{7}$ und berechnen das Quadrat hiervon. $2\times 2 = 4$; $2\times 2\times {}^{5}/_{7} = {}^{20}/_{7}$; ${}^{5}/_{7}\times {}^{5}/_{7} = {}^{25}/_{49}$. Daraus machen wir ${}^{3}/_{7}$, so bleiben ${}^{4}/_{49}$ übrig; wir addieren die $^3/_7$, die wir hatten, zu den 20, giebt 23. Aus diesen machen wir 3 Ganze, so ist das Quadrat $7 + {}^2/_7 + {}^4/_{49}$. Wir multiplizieren nun 49 mit 7, giebt 343, addieren dazu 14, nämlich $^2/_7$ von 49, ist 357, ferner addieren wir dazu $^4/_{49}$ (von 49), d. h. 4 Ganze, so ist alles zusammen 361; dies ist das Quadrat von 19. — Addieren wir 2 Quadrate, sei es der Reihe nach oder entfernt von einander, verdoppeln die Summe und subtrahieren davon das Quadrat der Differenz ihrer beiden Wurzeln, so ist der Rest immer ein Quadrat, und die Summe der beiden Wurzeln ist die Wurzel.[144] Beispiel. Wir addieren 81, das Quadrat von 9, zu 729, dem Quadrat von 27, giebt 810; das Doppelte hiervon ist 1620. Wir wissen, dass die Wurzel des kleinen Quadrats 9 und die Wurzel des grösseren Quadrats 27 ist; die Differenz zwischen beiden ist 18, das Quadrat hiervon 324. Dies subtrahieren wir von dem Produkt, bleibt 1296 übrig; dies ist das Quadrat, und die Wurzel davon ist 36, nämlich die Summe von $9 + 27$. Addieren wir 3 Quadrate, verdreifachen die Summe und subtrahieren von dem Produkt zuletzt die Quadrate der 3 Differenzen, die zwischen den Wurzeln der 3 Zahlen bestehen, so ist der Rest, der zuletzt herauskommt, ebenfalls ein Quadrat. Addierst Du die 3 Wurzeln, so ist die Summe die Wurzel des Restes.[145] Beispiel. Wir addieren 36, das Quadrat von 6, und 64, das Quadrat von 8, und 400, das Quadrat von 20, so ist die Summe der 3 Quadrate 500. Dies verdreifachen wir, giebt 1500. Diese Zahl behalten wir. Nun suchen wir die Differenzen. Die Differenz zwischen 6 und 8 ist 2, das Quadrat davon 4; die Differenz zwischen 6 und und 20 ist 14, das Quadrat davon 196; die Differenz zwischen 8 und 20 ist 12 und das Quadrat davon 144. Also sind die Quadrate dieser 3 Zahlen zusammen 344. Dies subtrahieren wir von dem behaltenen Produkt, so bleiben 1156 übrig; dies ist das Quadrat. Die Summe der 3 Wurzeln ist 34; dies ist die Wurzel des übrig gebliebenen Quadrats. — Ebenso wenn Du 4 oder 5 Zahlen addierst und sie ebensoviel mal vervielfachst, d. h. überhaupt immer mit der Anzahl der addierten Quadrate multiplizierst, und immer die Quadrate der Differenzen, soviele ihrer sind, von dem Produkte subtrahierst, so ist der Rest ein Quadrat. Nur musst Du darauf achten, die Differenzen zu berechnen. Ich werde nun eine Regel sagen, nach der Du wissen kannst, wie gross die Anzahl der Differenzen ist. Subtrahiere immer 1 von der Anzahl der Quadrate und berechne die Summe aller Zahlen bis zu dieser Zahl, wie ich Dir gezeigt habe; so gross wie diese Summe, ist die Anzahl der Differenzen. Beispiel. Wir addieren 6 Quadrate und wollen die Anzahl der Differenzen wissen. Wir subtrahieren 1, wie wir (eben) gesagt haben, bleiben 5 übrig. Die Summe der Zahlen bis zu 5 ist 15, ebenso gross ist die Anzahl der Differenzen.

Jetzt wollen wir von den quadratischen Brüchen sprechen, die eine wahre (d. h. rationelle) Wurzel haben. Wir wollen eine allgemeine Regel für quadratische Brüche, allein oder in Verbindung mit Ganzen, angeben. Sieh' zu, wenn der Bruch $^1/_2$ oder $^1/_3$ oder $^1/_5$ oder $^1/_6$ oder $^1/_7$ oder $^1/_8$ ist, so ist er kein Quadrat, und zwar deshalb, weil diese Zahlen als Ganze keine Quadrate sind, sondern nur, wenn $^1/_4$ oder $^1/_{25}$ oder $^1/_{36}$ oder $^1/_{49}$ oder $^1/_{64}$ oder $^1/_{16}$ dasteht. Ferner achte auf folgendes: Steht im Quadrat $^1/_4$, so wisse, dass in der Wurzel $^1/_2$ steht; steht dort $^1/_9$, so wisse, dass in der Wurzel $^1/_3$ steht; steht dort $^1/_{16}$, so wisse, dass in der Wurzel $^1/_4$ steht Zunächst wollen wir nun von den quadratischen Brüchen sprechen, die allein ohne Verbindung mit Ganzen sind. Wir haben bereits gesagt, dass es mit den Brüchen umgekehrt wie mit Ganzen sich verhält. Wenn Du eine ganze Zahl mit sich selbst oder mit einer andern multiplizierst, so ist das Produkt grösser als die Zahlen, umgekehrt ist das bei Brüchen; wenn die Quadrate der ganzen Zahlen grösser sind als ihre Wurzeln, so ist es mit den quadratischen Brüchen umgekehrt: ihre Wurzeln sind grösser als ihre Quadrate. Die Quadrate aus ihren Wurzeln zu berechnen, ist etwas Leichtes, so ist $^1/_2 \times {}^1/_2 = {}^1/_4$, dies ist das Quadrat; ebenso ist $^1/_3 \times {}^1/_3 = {}^1/_9$, $^2/_3 \times {}^2/_3 = {}^1/_3 + {}^1/_9$, $^4/_5 \times {}^4/_5 = {}^3/_5 + {}^1/_{25}$. Dies ist das Quadrat, und in dieser Weise wird alles gerechnet. Schwer aber ist, die Wurzel aus dem Quadrat zu berechnen. Ich werde Dir nun eine allgemeine Methode nach Art der Astronomen angeben, die alle ihre Zahlen von der Zahl 60 ableiten. Wenn jemand fragt, wieviel sind $^2/_3$ multipliziert mit $^2/_3$, so multipliziere 40 mit 40, giebt 1600, dividiere dies mit 60, giebt 26′, und 40″ bleiben übrig. Dies ist zusammen $= {}^4/_9$, denn $^1/_9$ von 60 ist $6' + 40'' = {}^2/_3{}'$. Machen wir aus dieser Zahl ($6^2/_3{}'$) Drittel, so sind's 20, multiplizieren wir ferner die 3 mit 60, so sind's 180, und alles ist in demselben Verhältnis. Dividieren wir diese Zahl (180) mit 20, so kommt 9 heraus, also $^1/_9$. Kehrt der Fragesteller die Frage um und sagt: Das Quadrat ist $^4/_9$, wie gross ist die Wurzel? so kehre auch Du die Sache um und berechne, wieviel $^4/_9$ von 60 ist. Wir haben bereits gesagt, dass es 26′ 40″ sind. Mache aus den Minuten Sekunden und addiere die Sekunden hinzu, so beträgt alles 1600. Diese Zahl ist geradstellig und ist der 16 ähnlich. Rechne so, als wären es Ganze, so ist die Wurzel 40, dann rechne wieder, dass es Minuten sind, so ist dies die Wurzel. Ein Beispiel mit einer Zahl, die durch 60 nicht teilbar ist. Wir multiplizieren $^4/_7$ mit $^4/_7$ nach Art der Arithmetiker. Wir multiplizieren 4 mit 4, ist 16, dividieren mit 7, so erhalten wir $^2/_7 + {}^2/_{49}$. In einer Weise, die der der Astronomen ähnlich ist, (machen wir es so): Wir zerlegen es in Siebzigstel. $^4/_7$ sind 40 (Siebzigstel). Wir multiplizieren 40 mit 40, ist 1600, und dividieren mit 70, so erhalten wir 22′ 60″; dies ist das Quadrat. Kehrt der Fragesteller die Frage um und sagt: wie gross ist die Wurzel ebendieses Quadrats? so verwandeln wir die 22′ in Sekunden und addieren dazu die 60″, die wir hatten, so sind's 1600. Wir rechnen, als wären es Ganze, so ist ihre Wurzel 40, und rechnen nun, dass es Minuten sind; dies ist in Wahrheit die Wurzel. Wollen wir dies aus den Siebzigsteln wieder in Sechzigstel verwandeln, so multiplizieren wir 40 mit 60 und dividieren das Produkt mit 70; dann kommen 34 heraus, und 20 bleiben übrig. Diese multiplizieren wir nochmals mit 60 und dividieren das

Produkt mit 70, so kommen 17 heraus und $^1/(_{70})$ bleibt übrig. [(Dieses eine ist 10, daher ist die Zahl nicht genau.[146])] Wir machen Sechzigstel daraus, und weil 70 grösser ist als 60, multiplizieren wir es nochmals, so sind's 3 600 und dividieren dies mit 70, so kommen 51 heraus. Damit ist es genug. Anderes Beispiel. Wir multiplizieren $^1/_3$ mit $^1/_3$, so kommt $^1/_9$ heraus, dies ist das Quadrat. Wir zerlegen es in Neunzigstel. $^1/_3$ ist 30, multiplizieren wir dies mit sich selbst, so kommen 900 heraus. Dies dividieren wir mit 90, so kommen 10 Bruchteile heraus; dies ist das Quadrat. Nun wollen wir umgekehrt die Wurzel aus diesem Quadrat berechnen. Aus den 10 machen wir Sekunden, so sind es 900, rechnen, als wären es Ganze, und was herauskommt, sind Minuten; und das ist die Wurzel.

Dies alles ist richtig, wenn eine wirkliche Quadratzahl und eine wirkliche Wurzel da ist, nicht aber, wenn man Bruchteile aufgiebt, die keine wahre Wurzel haben, sei es, dass 60 durch sie teilbar ist oder nicht; z. B. wenn man sagt: 12′ ist das Quadrat, wie gross ist die Wurzel? Wir wissen, dass $12 = {}^1/_5$ von 60 ist, und haben bereits gesagt, dass in einem Quadrat kein Fünftel stehen kann. Ebenso wenn man sagt, dass das Quadrat 10, also $^1/_6$ ist, kann dies auch nicht sein. Nur wenn man (z. B.) sagt, dass das Quadrat 1′ 40″, also $^1/_{36}$ ist, dann ist es richtig. Selbst von den Zahlen, durch die 60 teilbar ist, sind die meisten nicht Quadrate, um so mehr die Zahlen, durch die es gar nicht einmal teilbar ist, wie 11, 13, (15,)[147] 17, 19 und viele andere, durch die es nicht teilbar ist. Später werde ich Dir eine Methode angeben, aus jedem Bruche als Quadrat die Wurzel in annähernd richtiger Weise auszuziehen. Jetzt will ich von Ganzen mit Brüchen sprechen, die Quadrate sind. Beispiel. Es fragt jemand: Wie gross ist die Wurzel des Quadrats $11^1/_9$? Da er $^1/_9$ genannt hat, so wird es ein Quadrat sein und in der Wurzel $^1/_3$ entsprechend dem Neuntel stehen. Nimm das Neuntel, welches ein quadratischer Doppelbruch $\left(\frac{\frac{1}{3}}{3}\right)$ ist, fort,[148] so bleiben 11 Ganze übrig. Die Differenz von dem vorhergehenden Quadrat ist 2 Ganze, daraus machen wir Minuten, das sind 120, und dividieren dies mit dem Doppelten der vorhergehenden Wurzel, d. i. 6, so kommen 20 heraus, also ist die Wurzel 3 Ganze und 20′ oder $^{1}/_{3}$. Anderes Beispiel. Das Quadrat ist 7 Ganze 50′ 24″. Da 24″ da stehen, so wissen wir, dass in der Zahl $^{1}/_{25}$, d. h. 2′ 24″, ist. Nehmen wir diesen quadratischen Bruch von der gegebenen Zahl fort, so bleiben 7 Ganze 48′ übrig. Die Differenz zwischen dem nachfolgenden Quadrat ist 1 Ganzes 12′ oder 72′; diese dividieren wir mit dem Doppelten der nachfolgenden Wurzel, d. i. 6, giebt 12′. Diese subtrahieren wir von der Wurzel 3, so bleiben 2 Ganze 48′ übrig. Dies wollen wir durch Multiplikation prüfen: $2 \times 2 = 4$; $2 \times 2 \times 48 = 192$. 48′ = $^{4}/_{5}$, also sind's $^{16}/_{5}$. Daraus machen wir 3 Ganze, bleibt $^{1}/_{5}$ übrig. Nun müssen wir noch $^{4}/_{5}$ mit $^{4}/_{5}$ multiplizieren, das ist $^{16}/_{25}$. Aus 15 machen wir $^{3}/_{5}$ und addieren dazu das $^{1}/_{5}$, das wir hatten, so sind's $^{4}/_{5}$ + $^{1}/_{25}$. $^{4}/_{5}$ sind 48′ und $^{1}/_{25}$ ist 2′ 24″, also alles zusammen 50′ 24″ und 7 Ganze. Beispiel. Das Quadrat ist 44 $^{4}/_{9}$. Wir wissen, dass die Neuntel von Dritteln herkommen. Wir nehmen also diesen quadratischen Doppelbruch fort und suchen die Differenz zwischen den Ganzen und dem vorhergehenden Quadrat. Diese beträgt 8; daraus machen wir Minuten, sind 480, dividieren diese mit 12, dem Doppelten der Wurzel des vorhergehenden Quadrats, so kommen 40′ heraus, also ist die Wurzel 6 Ganze 40′. Die 40′ sind die Brüche, 40 sind $^{2}/_{3}$ von 60. Multiplizieren wir 2 mit 2, kommt 4 heraus, und dividieren diese mit 3, so kommt $^{1}/_{3}$ heraus, und $^{1}/_{9}$ bleibt übrig; das sind $^{4}/_{9}$. Nach der Weise der Astronomen multiplizieren wir 6 mit 6, ist 36, ferner 6 mit 40 und 40 mit 6, giebt 480′. Diese dividieren wir mit 60, kommen 8 Ganze heraus, addieren diese zu den 36, sind's 44. Wir multiplizieren 40 mit sich selbst und dividieren das Produkt mit 60, und was übrig bleibt, sind Sekunden, so erhalten wir 26′ 40″, das sind $^{4}/_{9}$; denn sie verhalten sich zu 60 wie 4 : 9. Nachdem ich diese Beispiele angegeben habe, verfährst Du in dieser Weise mit allen Stellen.

Jetzt will ich Dir eine allgemeine Methode für alle Zahlen angeben, mögen sie eine wahre Wurzel haben oder nicht. Merke Dir, dass immer die Differenz zwischen zwei der Reihe nach auf einander folgenden Zahlen [Quadratzahlen] gleich der Summe der beiden Wurzeln ist. Sieh' also zu, wie gross die Differenz zwischen Deiner Zahl und dem vorhergehenden Quadrat ist. Ist die Differenz zwischen Deiner Zahl und dem vorhergehenden Quadrat gerade soviel wie die Wurzel des vorgehenden Quadrats, so ist es die mittlere Zahl. Jede Zahl, die kleiner ist als die mittlere, berechne aus dem vorhergehenden Quadrate; ist aber die Differenz grösser als die vorhergehende Wurzel, so berechne (die Zahl) aus dem folgenden Quadrate. Beispiel. Die Zahl ist 20. Die Differenz zwischen ihr und dem vorhergehenden Quadrat ist 4. Verwandelst Du diese in Minuten und dividierst sie mit 8, dem Doppelten der Wurzel, so sind's 30, die Hälfte von 60. Nehmen wir die Differenz zwischen 20 und dem folgenden Quadrat, so beträgt diese ebensoviel wie die Wurzel. Verwandeln wir sie in Minuten und dividieren sie mit 10, dem Doppelten der Wurzel, so sind's (auch) 30. Darum sagte ich, dass 20 die mittlere Zahl sei. Nun merke auf! Ist Deine Zahl nahe dem vorhergehenden Quadrate, so berechne die Differenz, mache daraus Minuten und, wenn in Deiner Zahl Minuten sind, addiere sie zu den Minuten, die Du bekommen hast. Hast Du auch Sekunden, so verwandle alles in Sekunden oder wähle folgenden kürzeren Weg: Betragen die Sekunden weniger als 30, so lasse sie fort; betragen sie mehr, so vermehre die Minuten um 1. Nachdem Du weisst, wieviel Minuten die Differenz beträgt, dividiere diese mit dem Doppelten der vorhergehenden Wurzel, und den Quotienten addiere zu der vorhergehenden Wurzel. Die Summe nennt man die „erste Wurzel". Liegt Deine Zahl in Hundertern oder Tausendern, so hast Du an dieser Wurzel genug, denn die Ungenauigkeit schadet nichts; ist aber die Zahl klein, so brauchst Du noch die „zweite Wurzel", die genauer ist. Um Sehnen und Bogen zu berechnen, brauchst Du (sogar) die „dritte Wurzel“, die noch genauer ist. Die Genauigkeit erhältst Du so: Wenn Du die Minuten der Differenz hast, so berechne ihr Quadrat, dividiere es mit dem Doppelten der ersten Wurzel, merke, wie gross der Quotient ist, und in welcher Stufe er steht, ob in den Minuten oder in den Sekunden, wie ich Dir in der Pforte der Brüche gezeigt habe, und subtrahiere den Quotienten von der ersten Wurzel, so ist der Rest die zweite Wurzel. Willst Du es noch genauer berechnen, so nimm das Quadrat des Quotienten und dividiere es mit dem Doppelten der zweiten Wurzel. Jetzt will ich Dir Beispiele nach Art der Arithmetiker mit annähernder Berechnung geben. Wir wollen die Wurzel von 200 wissen. Das vorhergehende Quadrat ist 196, die Differenz 4. Dividierst Du diese mit 28, dem Doppelten der Wurzel, so kommt $^1/_7$ heraus, also ist die Wurzel 14 $^1/_7$. Willst Du die Wurzel von 20 000 wissen, so multipliziere diese Wurzel mit 10, giebt 141 $^3/_7$. Wollen wir die Wurzel von 2 aus der Wurzel von 200, welche 14 $^1/_7$ ist, berechnen, so nehmen wir $^1/_{10}$ davon. Von 10 nehmen wir 1 Ganzes; $^1/_{10}$ von 4 ist $^4/_{10}$. Wir wissen, dass $^4/_{10} = {}^2/_5$ und diese $= 24'$. Nun müssen wir noch $^1/_{10}$ von $^1/_7$ nehmen. Wie wir bereits gesagt haben,[149] ist $^1/_7$ von $60 = 8' \ 34''$. Nun verwandeln wir alles in Sekunden, so sind's $514''$, $^1/_{10}$ davon $52''$, also ist die erste Wurzel $1^0 \ 24' \ 52''$. Dies entspricht nahezu der Wahrheit. Nun wollen wir dieselbe Wurzel von 20 000 nochmals ausziehen. Wir wissen, dass diese Zahl den Einern ähnlich ist; denn 10 000 ist der 1 ähnlich, und dies ist das ähnliche Quadrat. Wir subtrahieren also 10 000 von unserer Zahl, so bleiben 10 000 übrig. Diese dividieren wir mit dem Doppelten der Wurzel, also mit 200, geben dafür aber nicht alles, was wir können, sondern lassen entsprechend dem Quadrate des Quotienten übrig. Wir geben also 40 dafür, so bleiben uns 2 000 übrig. Davon subtrahieren wir 1 600, das Quadrat des Quotienten, so bleibt 400 übrig. Unsere Wurzel ist 140, das Doppelte also 280; damit dividieren wir den Rest. Wir geben 1 dafür, so bleiben 120 übrig, subtrahieren davon 1, das Quadrat von 1, so bleibt 119 übrig, und unsere Wurzel ist 141. Aus dem Rest machen wir Minuten, so sind's 7140′, und dividieren diese mit 282, dem Doppelten unserer Wurzel, so kommen 25′ 19″ heraus. Nun dividieren wir alles, was wir an Ganzen und Sekunden genannt haben, mit 100, so kommt 1^0 24′ 51″ 11‴ heraus. Dies ist genauer als die erste Wurzel, die wir genannt haben. Nimmst Du irgend eine Zahl, welche das Doppelte einer Quadratzahl ist, und multiplizierst die Wurzel dieser Quadratzahl mit dieser Wurzel, so erhältst Du die Wurzel der Zahl genau. Beispiel. Wir wollen wissen, wie gross die Wurzel von 18 ist. Wir multiplizieren also mit der Wurzel des Quadrats, dessen Doppeltes diese Zahl ist, so kommen 4^0 14′ 33″ 33‴ heraus. Verdoppeln wir diese Zahl, so ist es die Wurzel von 72, dem Vierfachen von 18. Nehmen wir die Hälfte dieser Wurzel, so ist dies die Wurzel von $4^1/_2$, dem vierten Teile von 18. Nehmen wir als Quadrat 7200 an, das Doppelte des Quadrats von 60, so ist die Wurzel 84^0 51′ 11″. Dies ist dieselbe Wurzel wie die von 2, wenn wir sie einen Grad niedriger setzen. Betrachte diese 84^0 als Minuten, die Minuten als Sekunden und die Sekunden als Terzen. Multiplizierst Du diese Zahl mit sich selbst, nachdem Du sie in Terzen verwandelt hast, und dividierst sie, wie sich's gehört, um sie in höhere Stufen zu bringen, so bleibt Dir nicht einmal 1 Sekunde übrig, geschweige denn eine Minute.[150] Nun wollen wir die Wurzel von 2 nochmals ausziehen, damit dies als (Muster-) Beispiel für die Einer gelte. Das vorhergehende Quadrat ist 1, die Differenz zwischen ihm und unserer Zahl ist 1. Daraus machen wir Minuten, giebt 60, und dividieren sie mit dem Doppelten der Wurzel, d. i. 2, so erhalten wir 30′, also ist die erste Wurzel 1^0 30′. Diese ist aber ungenau, weil sie von einer kleinen Zahl herrührt; denn als wir sie aus der Zahl 200 auszogen, war sie der Wahrheit nahe, und aus 20 000 war sie genauer, und da genügte uns die erste Wurzel. Unser Quotient war 30′, das Quadrat davon ist 15′; denn das Produkt von Minuten mal Minuten ist Sekunden, also 900″. Dividieren wir diese mit 60, so erhalten wir 15'. Diese dividieren wir mit dem Doppelten der Wurzel, die wir hatten, d. i. 3, so kommen 5 heraus. Diese subtrahieren wir von der Wurzel, die wir hatten, so ist die zweite Wurzel 1° 25'. Diese ist auch noch ungenau, weil es (2) eine kleine Zahl ist. Wir nehmen also wieder das Quadrat des Quotienten (5'), d. i. 25'', und das Doppelte der zweiten Wurzel 1° 25', die wir hatten, ist 2° 50', und dividieren die Sekunden damit. Da wir $^5/_6$ [151] haben, so verwandeln wir alles in Sechstel, multiplizieren also 25 mit 6, giebt 150, und dividieren dies mit 17. Wir geben dafür 8, so bleiben 14 übrig. Diese verwandeln wir in Sechzigstel, giebt 840, und dividieren sie mit 17, so kommen 49''' heraus, und $^7/_{17}$ bleiben übrig. Diese lassen wir ausser Acht, — wir brauchen sie nicht; denn wir müssten noch das Quadrat des Quotienten abziehen. Subtrahieren wir nun 8'' 49''' von der zweiten Wurzel, so ist der Rest 1° 24' 51'' 11'''. Würden wir nach Art der Astronomen gerechnet haben, so würde dasselbe herauskommen. Würden wir noch genauer rechnen, indem wir wieder das Quadrat der genannten 8'' 49''' nehmen, so würde die Wurzel möglichst genau herauskommen, nämlich 1° 24' 51'' 17''' 54''''. Wir wollen die Wurzel von 10 ausziehen. Die Differenz zwischen dem vorhergehenden Quadrat ist 1. Daraus machen wir Minuten, giebt 60, und dividieren sie mit 6, dem Doppelten der vorhergehenden Wurzel, giebt 10, also ist die erste Wurzel 3° 10'. Wir berechnen es genauer und nehmen also 100, das Quadrat des Quotienten, und dividieren es mit $6^1/_3$, dem Doppelten der ersten Wurzel. Wir verwandeln alles in Drittel, dann haben wir 300 mit 19 zu dividieren, giebt 15, und 5 bleiben übrig. Diese 5 verwandeln wir in Terzen, also in Sechzigstel, giebt 300, und dividieren sie mit 19, so kommen 15 heraus. Dies müssen wir von den 10', die wir hatten, subtrahieren. Subtrahieren wir also 15'' 15''', so ist der Rest 9' 44'' 45''', also ist die zweite Wurzel 3° 9' 44'' 45'''. Rechnen wir noch genauer, so ist sie 3° 9' 44'' 12'''. Multiplizieren wir diese Zahl mit 10, so ist das Produkt 31° 37' 22''; dies ist die Wurzel von 1000. Multiplizieren wir sie mit 1000, so finden wir die Wurzel von 10 000 000. Aufgabe. Wir dividieren die Wurzel von 18 mit der Wurzel von 8; wieviel kommt heraus? Wir wissen, dass 18 und ebenso 8 keine Wurzel haben; wir verfahren also anders. Wir dividieren 18 mit 8, so ist der Quotient $2\frac{1}{4}$. Diese Zahl ist ein Quadrat, und ihre Wurzel ist $1\frac{1}{2}$. Addieren wir zu dem Doppelten der Wurzel von 2 die Hälfte davon, so finden wir die Wurzel von 18 genau.[152] Aufgabe. Wir haben eine Leiter an eine Wand gestellt. Dieselbe ist 10 Ellen hoch, und ebenso hoch ist die Leiter. Die Spitze der Leiter haben wir 2 Ellen von oben heruntergerückt. Wir wollen nun wissen, wie gross der Abstand der Leiter von der Grundlinie der Mauer ist.[153] Ich werde Dir eine Regel hierfür geben. Immer ist das Quadrat dessen, was von der Spitze der Leiter an übrig geblieben ist, zusammen mit dem Quadrat des Abstandes des Fusses (der Leiter) von der Grundlinie (der Mauer) gleich dem Quadrat der Leiter. Wir subtrahieren also die zwei Ellen, welche die Spitze von dem Rande der Wand herabgerückt ist, so bleiben 8 übrig. Das Quadrat davon ist 64; diese subtrahieren wir von 100, dem Quadrat der Leiter, so bleiben 36 übrig. Die Wurzel davon ist 6; soviel beträgt der Abstand der Leiter unten von der Grundlinie. Anderes Beispiel. Wir haben die Spitze 1 Elle heruntergerückt; wie gross ist der Abstand von der Grundlinie? Wir subtrahiren 1 von 10, bleiben 9 übrig. Das Quadrat hiervon ist 81; diese subtrahieren wir von 100, bleiben 19 übrig; dies ist das Quadrat des Abstandes. Die Wurzel davon ziehen wir so aus: Wir wissen, dass die Differenz zwischen (19 und) 16 = 3 ist; daraus machen wir Minuten, giebt 180, und dividieren diese mit 8, dem Doppelten der vorhergehenden Wurzel, so ist der Quotient 22′ 30″, also ist die Wurzel 4° 22′ 30″. Wir nehmen das Quadrat des Quotienten und dividieren es mit 8° 45′, dem Doppelten der ersten Wurzel, so kommen 58″ heraus. Diese subtrahieren wir von der ersten Wurzel, so erhalten wir 4° 21′ 32″. Genauer brauchen wir es nicht zu berechnen.

Jetzt wollen wir beginnen, vom Kreise zu sprechen, weil derselbe von der Wurzel abhängt. Wisse, dass es am Kreise viele Dinge giebt: 1. die Kreislinie, 2. den Durchmesser, 3. das „Vielfache“ (π),[154] 4. die Sehne, 5. den Pfeil, 6. den Flächeninhalt.[155] Du kannst eins davon, das unbekannt ist, aus zweien derselben, die bekannt sind, berechnen; bei einigen von ihnen kann man ein Unbekanntes aus einem einzigen andern berechnen, wie ich erklären werde. Für jedes Einzelne werde ich ein Beispiel geben. Denken wir uns einen Kreis, dessen Durchmesser 10 ist. Die halbe Sehne ist 4 und der Pfeil 2; wie gross ist der Durchmesser? Wir dividieren das Quadrat der halben Sehne mit dem Pfeil und addieren den Pfeil selbst zu dem Quotienten, so ist die Summe der Durchmesser. Anderes Beispiel für den Durchmesser 10. Der Pfeil ist 3 und das Quadrat der halben Sehne 21. Wir dividieren dies mit dem Pfeil, giebt 7, und addieren 3 hinzu, so ist dies der Durchmesser. Eine Methode, die Sehne aus dem Pfeil und dem Durchmesser zu berechnen: Der halbe Durchmesser sei 5 und der Pfeil 1. Wir subtrahieren diesen von 5, so bleibt bis zum Mittelpunkte 4 übrig. Das Quadrat davon ist 16, dies subtrahieren wir von 25, dem Quadrat des halben Durchmessers, so bleiben 9 übrig. Die Wurzel davon ist 3; so gross ist die halbe Sehne, also die ganze Sehne 6. Folgende Regel diene Dir zur Grundlage: Immer ist das Quadrat dessen, was vom Pfeil bis zum Mittelpunkte[156] übrig bleibt, zusammen mit dem Quadrat der halben Sehne gleich dem Quadrate des halben Durchmessers. Eine andere Methode, die Sehne zu berechnen: Multipliziere den Pfeil mit dem ganzen Reste des Durchmessers, so ist das Produkt das Quadrat der halben Sehne. Nimm die Wurzel davon und verdoppele sie, so findest Du die ganze Sehne. Eine andere Methode: Sieh' zu, wie sich der Pfeil zum ganzen Durchmesser verhält; dasselbe Verhältnis nimm vom Quadrate des Durchmessers, so ist dies die Summe aus dem Quadrate des Pfeils und dem Quadrate der halben Sehne. Das Quadrat des Pfeils verhält sich zu der Summe aus dem Quadrat des

Pfeils und dem Quadrat der halben Sehne wie der Pfeil zum ganzen Durchmesser. Beispiel für den genannten Kreis. Der Pfeil ist 2, also verhält er sich zum ganzen Durchmesser wie 1:5. $\frac{1}{5}$ von 100, dem Quadrat des ganzen Durchmessers, ist 20. Diese Zahl enthält das Quadrat des Pfeils und das Quadrat der halben Sehne. Nun muss das Quadrat des Pfeils $\frac{1}{5}$ von 20 sein, also 4. Diese subtrahieren wir von den 20, so bleiben 16 übrig. Dies ist das Quadrat der halben Sehne. Anderes Beispiel mit einer Zahl, die Brüche hat. Nehmen wir an, der Pfeil sei $3^0\ 20'$. Er verhält sich demnach zu 10 wie 1:3, wir nehmen also $\frac{1}{3}$ von 100, dem Quadrat des Durchmessers, das ist $33^0\ 20'$, und davon $\frac{1}{3}$, giebt $11^0\ 6'\ 40''$; dies ist das Quadrat des Pfeils. Dies subtrahieren wir von $33^0\ 20'$, so bleiben $22^0\ 13'\ 20''$ übrig; dies ist das Quadrat der halben Sehne. Ich will Dir eine allgemeine Regel für den Kreis angeben. Wir wissen, dass 2 Durchmesser gleich sind und den Kreis halbieren. Ist der Pfeil ein Drittel des Durchmessers, so ist das Quadrat der halben Sehne doppelt so gross, zusammen sind sie dreimal so gross. Ist der Pfeil ein Viertel des Durchmessers, so ist das Quadrat der halben Sehne dreimal so gross wie das Quadrat des Pfeils; u. s. w. Aufgabe. Nehmen wir an, der Pfeil sei $20'$, so kannst Du dies Verhältnis in zweifacher Weise berechnen. Erstens so: Du verwandelst den ganzen Durchmesser in Minuten, giebt 600 und stellst folgende Proportion auf: $\begin{matrix} 20 & 600 \\ 0 & 100 \end{matrix}$. Wir multiplizieren 20 mit 100, dem Quadrat des Durchmessers, giebt 2000, und dividieren dies mit 600, giebt $3^0 + \frac{1}{3}$ oder $20'$. Diese Zahl enthält die beiden Quadrate. Wollen wir nun noch das Quadrat des Pfeils von dem Quadrat der halben Sehne trennen, so nehmen wir von $3^0\ 20'$ das Verhältnis von $3^0\ 20' : 100^0$; das giebt $6'\ 40''$, dies ist das Quadrat des Pfeils. Dann bleibt als Quadrat der halben Sehne $3^0\ 13'\ 20''$ übrig. Die andere Weise ist folgende: Wir wissen, dass $20'$ von 10^0 $\frac{1}{30}$ ist; wir nehmen also von 100, dem Quadrate des Durchmessers, $\frac{1}{30}$, das ist $3^0\ 20'$. Eine Methode, den Pfeil aus der Sehne zu berechnen: Subtrahiere das Quadrat der halben Sehne von dem Quadrat des halben Durchmessers, nimm die Wurzel des Restes und subtrahiere sie von dem halben Durchmesser, so ist der Rest der Pfeil. Beispiel. Nehmen wir an, die Sehne sei 6. Wir nehmen das Quadrat ihrer Hälfte, das ist 9, und subtrahieren es von 25, dem Quadrate des halben Durchmessers, so bleiben 16 übrig, die Wurzel davon ist 4. Diese subtrahieren wir vom halben Durchmesser, d. i. 5, so bleibt 1 übrig; so gross ist der Pfeil. Die Peripherie aus dem Durchmesser zu berechnen: Die Geometer sagen, dass die Peripherie $3\frac{1}{7}$ [157] mal so gross sei als der Durchmesser, das Verhältnis also 7 : 22 sei. Multiplizierst Du also den Durchmesser mit $3\frac{1}{7}$, so ist das Produkt die Peripherie; oder: Multiplizierst Du einen beliebigen Durchmesser mit 22 und dividierst das Produkt mit 7, so findest Du die Peripherie. Umgekehrt machst Du es, wenn Du die Peripherie kennst und den Durchmesser wissen willst. Multipliziere die Peripherie mit 7 und dividiere das Produkt mit 22, so findest Du den Durchmesser. Nach ihrer (der Geometer) Ansicht ist also, wenn der Durchmesser 1 ist, die Peripherie $3^0\, 8'\, 34''\, 17'''$. Der weise Archimedes bewies, dass es weniger als diese Zahl sei, denn er sagte, dass der hinzukommende Bruch kleiner sei als $\frac{10}{70}$, und bewies ferner, dass der hinzukommende Bruch grösser sei als $\frac{10}{70\frac{1}{2}}$.[158] Der zu den 3 Ganzen hinzukommende Bruch wäre dann $8'\, 24''\, 35'''$; er bewies aber, dass er grösser sein müsse als diese Zahl. Ptolemäus nahm eine Mittelzahl an, nämlich dass der hinzukommende Bruch $8'\, 30''$ betrage. Die Weisen Indiens sagen: Wenn der Durchmesser 20000 ist, so ist die Peripherie 62838.[159] Siehst Du Dir diese Zahl genau an, so wirst Du finden, dass sie der des Ptolemäus nahe kommt; die Differenz beträgt nur $[50]'''$.[160]

Die 10 ist der Einheit ähnlich,[161] und den Kreis umgiebt eine Linie. Setzen wir nun den Durchmesser = 10, so ist das Viereck über der Sehne im Drittel des Durchmessers gleich der Peripherie, weder mehr noch weniger. Ebenso, wenn Du das Viereck zwischen dem oberen Drittel und dem unteren Drittel zeichnest, ist dessen Inhalt gleich der Peripherie.[162] Das Quadrat davon können wir (leicht) berechnen; es ist $987 + {}^{5}/_{9} + {}^{8}/_{81}$, das sind ${}^{53}/_{81}$.[163] Setzen wir den Durchmesser = 10, ziehen die Sehne im Drittel (des Durchmessers) und zeichnen darüber das gleichschenklige Dreieck, so ist der Flächeninhalt[164] des Dreiecks gleich der Peripherie.[165] Bei jeder Zahl vor 10 verhält sich das Dreieck im Drittel (des Durchmessers) zur Peripherie wie die Zahl zu 10. Ist sie grösser als 10, so verhält sich die Peripherie zu dem Dreieck im Drittel wie 10 zum Durchmesser.[166] Fragen wir, wie gross die Peripherie ist bei dem Durchmesser 1, so ist die Peripherie $3^{0}\,8'\,33''\,42'''\,30''''$.[167] So ist bei einem Kreise mit dem Durchmesser 15 der Flächeninhalt (des Dreiecks) gleich der Wurzel von 5000,[168] weder mehr noch weniger.[169]

In der Geometrie und Astronomie braucht man darauf nicht zu achten. Es ist so, wie Archimedes gesagt hat, dass es mehr ist als $\frac{10}{70^1/_2}$, und kommt der Angabe der Weisen Indiens sehr nahe, denn die Differenz ist nur unwesentlich. Wie man die Bogen und Sehnen nach Ansicht der Astronomen berechnet, darüber spreche ich im Buche „Gründe der Tabellen.“ Sie wollen die Peripherie aus den Sehnen berechnen.[170] Die Geometer suchen zu berechnen,[171] wie gross der Flächeninhalt des Kreises ist. Nach ihrer Ansicht, wenn Du den Durchmesser kennst, multipliziere sein Quadrat mit 11 und dividiere das Produkt mit 14, dann findest Du den Flächeninhalt des Kreises.[172] Umgekehrt, wenn Du weisst, wie gross der Flächeninhalt des Kreises ist, und wissen willst, wie gross der Durchmesser ist, so multipliziere den Flächeninhalt mit 14 und dividiere das Produkt mit 11, dann ist der Quotient das Quadrat des Durchmessers, und seine Wurzel ist der Durchmesser.

Nun will ich noch darüber sprechen, warum die Arithmetiker 1 „zur Basis“ subtrahieren.[173] Wisse, dass 1—9 die wirklichen Zahlen sind, sie entsprechen den 9 Kreisen (Sphären);[174]

alle Zahlen danach sind ihnen ähnlich. Von den „ähnlichen Zahlen" sollte man eigentlich die Bezeichnung der Stellen hernehmen, so dass Zehner die erste Stelle bilden, Hunderter die zweite Stelle, Tausender die dritte Stelle, Zehntausender die vierte Stelle, Hunderttausender die fünfte Stelle und Millionen die sechste Stelle, und so bis ins Unendliche. Die Arithmetiker setzen aber (auch) die Einer in die Stellen; daher müssen sie 1 „zur Basis" subtrahieren. Dies ist klar, und Du wirst es an einem Beispiele sehen. Wir wollen 200 mit 300 multiplizieren. Die ähnlichen Zahlen sind 2 und 3. Wir multiplizieren diese mit einander, giebt 6; die Zahl der Stellen ist ebenfalls 6, 1 subtrahieren wir „zur Basis", giebt die fünfte Stelle, deren Anfang 10000 ist, also kommt 60000 heraus. Ich habe bereits gesagt, dass nach der wahren Berechnung der Anfang der vierten Stelle 10000 ist. Das Resultat ist ja dasselbe; sie thaten es nur, um es den Schülern zu erleichtern.[175]

Anmerkungen zur Übersetzung.

1) Über den Titel vgl. Einleitung.

2) Vgl. Jes. 2, 11 und 17; Ps. 148, 13; Jesod Mora[1]) Pf. XII Anfang.

3) Im Komm. zu Ex. 3, 15 (verf. 1153) werden 3 Welten unterschieden: 1) die niedere (Erde) השפל 2) die mittlere (Gestirne) האמצעי 3) die obere העליון. Hier wird die „mittlere“ (zu der die Sphären gehören) im Gegensatz zur „niederen“ (Erde) mit העליון bezeichnet. — Dieselbe Dreiteilung hat Israeli in seinem 1310 verf. Jesod ‘Olam Anfang.

4) 7 Sphären der 7 Planeten (משרתים, כוכבי לכת): Mond (לבנה), Merkur (כוכב חמה oder כוכב), Venus (נוגה), Sonne (חמה, שמש), Mars (מאדים), Jupiter (צדק), Saturn (שבת[א]י); die 8. Sphäre des Zodiak (גלגל המזלות), die 9., welche alle umringt. Letztere dreht sich von Ost nach West, die andern acht von West nach Ost.

5) Vgl. zu Ex. 3, 15 וככה הגלגלים ט׳, auch im S. ha-Schem[2]) hebr. S. 5b העגלות הגדולות genannt.

6) Dieses Buch von unbekannter Abfassungszeit wird oft von A. citiert. Spätere Superkommentare A.'s schreiben A. einen Kommentar zum S. J. zu, von dem frühere Quellen nichts wissen (vgl. St. 80). Das S. J. schildert die Bedeutung der 22 Buchstaben und 10 abstrakten Zahlen (ספירות) für die Schöpfung. Von Späteren wird es als kabbalistisches Werk ausgegeben und mehr verdunkelt als erklärt.

7) Die Worte בספר וספר וספור des S. J. haben die mannigfachsten Deutungen erfahren. So übersetzt Rittangel: numero, numerante et numerato, der Zahl, dem zählenden Subjekt und dem gezählten Objekt. Er liest also בִּסְפָר וְסוֹפֵר וְסָפוּר [סְפָר für Zählung 2 Chron. 2, 16]. R. Meïr von Toledo bezieht bereits die ספירות auf die Sphären und giebt eine gezwungene Erklärung (s. bei Rittangel z. St.).

---

[1]) Ed. Creizenach, Frankf. a. M. 1840. 16°.

[2]) Ed. Lippmann, Fürth. 1834. 8°.

Pistorius übersetzt: scriptis, numeratis, pronunciatis, liest demnach בְּסֵפֶר וּסְפָר וְסִפּוּר. Vgl. in Joh. Friedr. Meyer's Ausgabe des S. J.[1]) Eine einfache rationelle Erklärung giebt R. Jehuda b. Barsilai aus Barcelona (ed. Halberstam S. 138): כך פירוש הדבר שברא המקום את עולמו בל״ב נתיבות שהזכרנו והם כ״ב אותיות וי׳ ספירות (Zahlen) וברא את עולמו והנהיגו בהם בג׳ ענינים וקראן ספרי׳ לאלו הג׳ ענינים והם סֵפֶר וּסְפָר וְסִפּוּר ופירוש סֵפֶר זו היא כתיבה שהוא מכתב (Schrift) כדכתיב כי עזרא הסופר סופר(ב)תורת משה וגו׳ (Esra 7, 11 u. 6) וּסְפָר זה חשבון והוא המספר (Zahl) וכדכתי׳ בס׳ יוחסין (gemeint ist 2. Chron. 2, 16) אחרי הספר אשר ספר[ם] דו[י]ד אבי(נ)ו וְסִפּוּר זו הדבור והוא המאמר (Rede) כגון מי שמגיד לחברו דבריו ועניניו כדכתי׳ ויספר העבד ליצחק (Gen. 24, 26) ואם תשאל ותאמר למה הקדים סְפָר לְסִפּוּר וְסֵפֶר לִסְפָר לפי שבתחלה כותבין שרושמין התיבות ואחר כך חושבין אותן ואחר החשבון מספרין. Comm. B. bringt im Namen des R. Mose b. Samuel b. Tibbon folgende Erklärung: ספר וספר וספור פי׳ כי הדבור אצל ציור הלב והרעיון כצורה הנראה כמראה אצל עצם הדבר אשר היא צורה לו כי הציורים הם כשכלו נמצאים והציור הוא צורת עצם הדבר והדבור חקוי הציור והמכתב חקוי הדבור והם ספר ספר וספור ובעל ספר יצירה לא זכר מציאות העצם שהוא העקר והקדם אבל השלשה הנמצאים בנתיבות החכמה כך פי׳ אדונינו מאור הגולה החכם [2])הידוע ר׳ משה ב״ר שמואל בן תבון ז״ל. „Die Rede verhält sich zu dem Gebilde des Herzens und Gedankens wie ein Bild, das wie eine Erscheinung aussieht, zu dem Dinge selbst, dessen Bild es ist; denn die (Vorstellungs-) Gebilde treten ein, wenn die realen Dinge aufgehört haben, und das (Vorstellungs-) Gebilde ist das Bild des Dinges selbst, die Rede ist die Fixierung des Gebildes, und die Schrift ist die Fixierung der Rede; dies bedeutet „Denken (Zählen), Sprechen und Schreiben.“ Der Verfasser des „Buches der Schöpfung“ hat die Realität des Dinges nicht erwähnt, sondern diese 3 (Arten), welche auf den Pfaden der Weisheit angetroffen werden. So hat es unser Meister erklärt, die Leuchte der Diaspora, der bekannte Weise Rabbi Mose, Sohn des R. Samuel b. Tibbon sel. And.“ — Tibbon scheint in einer andern Reihenfolge, als in B punktiert ist, סְפָר וְסִפּוּר וְסֵפֶר gelesen zu haben und nimmt סְפָר allgemeiner für „Denken“. — Vgl. noch den Kommentar des R. Sabbatai Donolo (ed. Castelli) S. 34 und Castelli's angehängte italienische Abhandlung S. 32/33. - Die Buchstaben und Zahlen bilden den Weg der Weisheit, sie sind die Träger der menschlichen Wissenschaft: alles wird, sei es in Gedanken oder Schrift und Wort, mit ihrer Hilfe begriffen und mitteilbar und verständlich gemacht.

---

[1]) Leipzig. 1830. 4⁰.

[2]) החכם, nicht החבר, wie irrtümlich in St.'s Catal. Berl. hebr. Hs. S. 57.

8) Der Gedanke, mit welchem A. hier seine Arithmetik einleitet, ist folgender: Die Zahl ist das notwendige Hilfsmittel für den, der die Pfade der Wissenschaft („Ḥochma") gehen will. Unter „Ḥochma" aber versteht A. vor allem die praktische Wissenschaft der Astronomie [חכמת המזלות]; vgl. im babyl. Talmud Traktat שבת Fol. 75a den Ausspruch des R. Jonathan, der die astronomischen Berechnungen *κατ' ἐξοχήν* unter חכמה ובינה versteht. Da in der Sphärenwelt die Neunzahl vorherrscht, so geschieht auch in der Arithmetik, der unentbehrlichen Hilfswissenschaft der Astronomie, die Zählung mit Hilfe von 9 Zahlen. Das Dekadensystem ist für A. also kein zufälliges, sondern ein in der Astronomie begründetes System.

9) Vgl. Sefer ha-Schem S. 15b: ט׳ שהוא סוף המספר (auch S. 16), wo auch das Sefer Jezira mit der Angabe עשר ספירות בלי מה erwähnt wird, ferner S. Zachut S. 41b, ebenso in dem namenlosen Stücke Berl. Ms. hebr. Oct. 244 Fol. 10—16: והנה כל המספרים הם עד ט׳. Vgl. Nikomachus (ed. Ast) S. 25: *Ὅτι δὲ ἄρχεται μὲν ἀπὸ μονάδος, τελειοῦται δὲ ὁ ἀριθμὸς εἰς ι, λεχθήσεται προϊοῦσιν*; und S. 57: *Ὅτι δὲ οὐδὲν ὑπὲρ τὴν ἐννεάδα ὁ ἀριθμὸς ἐπιδέχεται, ἀλλὰ ἀνακυκλεῖ πάντα ἐντὸς ἑαυτῆς, δῆλον ἐκ τῶν λεγομένων παλινοδιῶν. μέχρι μὲν γὰρ αὐτῆς παλιμπετής . . . ὥστε μηδεμιᾷ μηχανῇ δυνατὸν εἶναι ἀριθμὸν ἄλλον ὑπὲρ τὰ ἐννέα σταχειώδη συστῆναι.*

10) Der mit „denn" beginnende Satz beweist, dass es nur 9 Zahlen giebt. Der vorige Satz ist in Parenthese zu denken.

11) Dasselbe S. Jesod Mispar (ed. Pinsker) S. 169: ומלת עֶשְׂרִים היתה ראוי הרי״ש להיות פתוח בעבור שהוא שם שני עשרות כאשר שלשים שלשה עשרות וככה עד תשעים וכו׳.

12) Bemerkenswert ist die Unterscheidung, welche A. zwischen כללים und פרטים macht. Ersteres, eig. „Hauptzahlen, Komplexzahlen" (vgl. hebr. S. 8 Z. 10: כולל שני המספרים) bezeichnet die Dekaden, letzteres, eig. „Sonderzahlen", die Einer. Diese Unterscheidung der Zahlen als כללים und פרטים findet sich ähnlich schon im babylon. Talmud Traktat בכורות Fol. 5a: ודילמא כללי קחשיב . . . פרטי לא קחשיב. „Vielleicht zählt die Schrift (näml. Ex. 38, 25) nur die Dekaden auf, nicht aber die Einer?" Dort ist von der Zahl 101 die Rede; mit כללי werden die 100, mit פרטי die 1 bezeichnet (vgl. רש״י zur St.). Einige Zeilen weiter wird ebendaselbst in der Zahl 171 die 100 mit כלל, die 70 mit פרטא רבה „grosse Sonderzahl" und die 1 mit פרטא זוטא „kleine Sonderzahl" benannt. Terquem übersetzt כלל mit „classe", Rodet mit „nombre rond (ce sont de dixaines)". Letzterer weist darauf hin, dass die Unterscheidung zwischen diesen beiden Teilen einer Zahl sehr alt ist. Vgl. das lateinische „digiti et articuli" bei Boethius und seiner Schule, ebenso bei den Arabern:

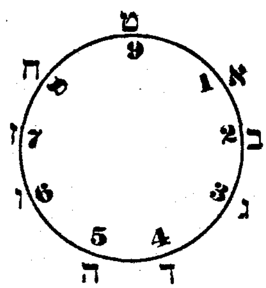
Muhammed b. Musa el-Khowarezmi bezeichnet die Zehner mit عقود 'uqûd, welches wie ein Plural von عقد 'aqd = articulation, jointure übersetzt werden muss; es ist die wörtliche Übersetzung von articuli. Behâ-ed-Dîn sagt nur: „Einer und was nicht solche sind". Vgl. L. Rodet „L'Algèbre d'Al-Khârizmi et les méthodes Indienne et Grecque" (im „Journal Asiatique", Januar 1878). — In unserer Übersetzung ist כלל nach dem Vorgange von M. Creizenach (Übersetzung des Jesod Mora) mit „Dekade" wiedergegeben.

13) אי״ק בכ״ר Vgl. zu diesen Buchstaben Sefer ha-'Ibbur hebr. S. 1b: .כי העשרה והמאה והאלף הם כמו אחד והוא חשבון אי״ק בכ״ר שילמדו הנערים בספרים

14) Der Beweis dafür nämlich, dass 9 das Ende jeder Zählung ist. Die erklärende Randnote in B: ר״ל היות כל מספר סובב על ט׳ (hebr. S. 1 Anm. 14), auch in M, findet sich wörtlich auch in dem Comm. B.

M (Rand) bemerkt noch als charakteristisches Zeichen, dass die Quersumme der mit 9 multiplizierten Einer 9 beträgt.

15) Von dem Kreise spricht A. auch zu Ex. 3, 15, im S. ha-Schem S. 15, S. ha-Echad unter Artikel „9". Misrachi in der Einleitung zu seinem S. ha-Mispar citiert A. und bringt den Kreis mit den 9 Ziffern, schreibt diese aber umgekehrt so hinein:



St's Anm. 112 S. 90 beruht auf einem Irrtum, denn in Cod. Luzzatto 114 (B) sind ebenso wie in der Ed. Mantua des Superkommentars „Mekor Chajjim" von Samuel Zarza absichtlich die gleichen Zahlen (hebr. und arabische) (wie hier) zusammengestellt. Die von St. das. gezeichnete Figur findet sich nirgends und wird auch an keiner Stelle von A. vorausgesetzt.

16) Vgl. S. ha-Schem S. 6b, Jesod Mora Cap. XI, Jesod Mispar (ed. Pinsker) S. 158, ebenso zu Kohelet 7, 27. In unserer Schrift Cap. VII werden die Zahlen 5 und 6 (שהם ה׳ ו׳) מתגלגלים „wiederkehrende" (eig. „sich wälzende") Zahlen genannt, weil sie in ihren Potenzen stets selbst wiederkehren. Comm. B bemerkt hier zur Stelle, dass deshalb nur die 5 (nicht auch die 6) „runde" Zahl genannt werde, weil sie nicht nur sich selbst in ihren Potenzen erhält, sondern auch ihr Quadrat 25 ($5^3 = 1\mathbf{25}$, $5^4 = 6\mathbf{25}$, $5^5 = 31\mathbf{25}$ u. s. w.). Zu diesem Namen der 5 vgl. noch Dieterici[1]) S. 7 und 8. Ebenso sagt Nikomachus S. 24 von der 5: *τετραγωνιζομένη ἀεὶ περιέχει ἑαυτήν. πεντάκις γὰρ πέντε κέ, μηκυνομένη δὲ αὐτὴ καὶ τὸν τετράγωνον ὅλον περιέχει καὶ λήγει εἰς ἑαυτήν. πεντάκις γὰρ κέ ρκέ.* S. 27 nennt er sie: *κυκλικῶς κινήσασα.*

---

[1]) Dieterici, Propädeutik der Araber.

17) Comm. B hebt einen andern Unterschied hervor: bei der Multiplikation von 9 mit 9, 8, 7 und 6 ist im Produkt die Zahl der Zehner grösser als die der Einer, von 5 an ist es umgekehrt.

18) Dasselbe im S. ha-Echad unter „9“. Gemeint ist die Rechnungsprobe durch Division der Ziffernsumme mit 9 (מאזנים eig. „Wage“, arabisch ميزان), welche A. allen Rechenoperationen folgen lässt. Dieselbe findet sich schon bei (vgl. St. S. 115 u. 109) Muhammed b. Musa al-Khowarezmi in seiner ins Lateinische übersetzten Schrift über die „indische Rechnung“ (ed. Boncompagni, Rom 1857, in den Trattati d'Aritmetica pubblicati da Bald. Boncompagni I. Algoritmi de numero Indorum S. 12), sowie bei Kuschjar b. Lebban (um 968) in seiner von Schalom b. Josef ענבי (um 1450—60) unter dem Titel עיון העקרים לחשבון ההנדיים „Betrachtung der Grundlehren der Rechnung der Inder“ ins Hebräische übersetzten Abhandlung Pforte XII und auch bei dem Zeitgenossen A.'s Johannes Hispalensis (Toletanus) (um 1135—53) (ed. Boncompagni Rom 1858 in den Trattati etc. II. Joannis Hispalensis liber Algorismi S. 32 und 41).

19) Über den Ursprung der 9 Zahlzeichen vgl. M. Cantor's „Mathematische Beiträge“[1]) S. 57 ff.: „Die fast allgemeine Sage nimmt den Ursprung der neun Ziffern bei den Indern an. – Massoudi, ein arabischer Schriftsteller über Indien (um 900), erzählt (s. Reinaud, Mémoires etc. sur l'Inde in den Mém. de l'Academie de France, Acad. des Jnscriptions et Belles lettres XVIII, 2 S. 324), unter Brahma's, des ersten indischen Königs Regierung, habe die Wissenschaft ihre grössten Fortschritte gemacht. Man erfand endlich die neun Zeichen, mit welchen die Inder rechnen. Ebenso äussert sich Maximus Planudes (um 1350 in Constantinopel) in seinem Werke über indische Rechenkunst; dieser giebt auch die zu seiner Zeit gebräuchlichen neun Ziffern an“ (vgl. bei Cantor Fig. 17). Nach A.'s Angaben, welche wohl auf älteren arabischen Quellen beruhen, in der Einleitung zu seiner hebr. (um 1160 in Narbonne verfassten) Übersetzung des Buches „Gründe der Tabellen“ (Ta'ame ha-Luchot טעמי הלוחות) des Khowarezmi von al-Matani [abgedruckt von St. in ZDMG XXIV S. 356—59; Nachträge XXV S. 420/421] schickte der Chalif אלצפאח, (es-Saffach 749—754) zu welchem der Ruhm der indischen Wissenschaft gedrungen war, einen Juden nach Indien, der mit einem Inder, namens כנכה, zurückkehrte, welcher die Araber „das Fundament der Zahl, welches in 9 Zeichen besteht“ [יסוד המספר שהם ט' אותיות] lehrte. Hiermit ist nach St. nicht die blosse Übertragung der Zahlzeichen, sondern das Dekadensystem der Ziffern gemeint, d. h. die Bezeichnung der Dekaden durch dieselben 9 Zeichen.

---

[1]) Halle 1863. 8°.

20) In M. stehen zwar die Worte צורת אנשי הודו, es fehlen aber, wie fast alle Figuren, so auch hier die Formen der Ziffern. Die in B. gegebenen Formen sind nicht die alten, sondern die zur Zeit des Schreibers (15.–16. Jahrhundert) in Italien geläufigen Ziffern. Dagegen zeigt P 1052 (Rodet S. 125) (vgl. hebr. S. 2 Anm. 26 und Einleitung über das Alter der Hs.) alte Zifferformen. Diese unterscheiden sich durch einige wichtige Einzelheiten von den Ghobar-Ziffern (vgl. Woepcke im Journal Asiatique 1863 Mémoire sur la propagation des chiffres indiens); noch weniger sind es die orientalisch-arabischen Ziffern, welche die Randnote (s. hebr. S. 2 Anm. 26) enthält. Sie sind aber bis in die kleinsten Details mit den Ziffern identisch, welche im Abendlande im 14. Jahrh. auftauchten. Die zweifachen Fehler in den Rechenbildern der Multiplikation[1]) beweisen aber: **1)** Das Zifferntableau ist nicht das Werk des Schreibers, sondern von diesem mechanisch kopiert, sonst hätte er die Fehler zu verbessern verstanden; **2)** Das Zifferntableau ist auch nicht von dem Buchstabentableau daselbst kopiert, denn es enthält andere Fehler als dieses; **3)** Beide Rechenbilder sind aus einer ältern unverstandenen Vorlage schlecht kopiert. Da P 1052 wahrscheinlich aus dem 14. Jahrhundert stammt, so liegt die Vermutung nahe, dass die Zifferformen in die Zeit des A. ibn Esra hinaufreichen und bereits von diesem angewandt wurden. Rodet neigt zu dieser Annahme. Die Ziffern, sagt er, seien nicht allein denen des Abendlandes im 14. Jahrh. ähnlich, sondern auch den ersten indischen Ziffern des modernen Systems, welche man auf den Inschriften des 8. Jahrhunderts erblicke. Vgl. die Abhandlung von Ed. Thomas im Journal Asiatique 1863, wo die Ziffern der Daten 703, 721, 732 mit denen des A. ibn Esra eine augenfällige Ähnlichkeit haben. Die Ziffern in H sind denen von P 1052 sehr ähnlich.

21) So lautet die Stelle in H, M, P 1050 (Terquem) u. P 1052 (Rodet); in B heisst es: „Die Israeliten aber haben genug an den Buchstaben der Tora.“ Wir dürfen mit Rodet (S. 13) annehmen, dass A. der erste ist, welcher die hebr. Buchstaben als Ziffern mit Positionswert anwendet.

22) A. nennt die Null nach ihrer Gestalt „galgal“ (Rad), da er sie ganz rund schrieb. Das in B später (hebr. S. 4 Z. 2) vorkommende Zeichen, welches sich auch in P 1029, 1049, 1050, 1051 findet, war ein Zeichen der Sexagesimal = 0 (vgl. Woepcke, Mémoire etc. Journ. Asiat. 1863). Es ist griechischen Ursprungs und stammt vom *o* des Wortes *οὐδέν*. Ueber die Heimat der Null vgl. M. Cantor's „Mathematische Beiträge“ (S. 67 ff.): „Die Inder kannten die Null zuverlässiger Weise spätestens um 600 n. Chr. Geb. Die mathematischen Schriften des

[1]) Anm. 38 gegen Ende.

Brahmegupta[1]) (um 650) liefern dafür den unumstösslichen Beweis, wo ein besonderer Abschnitt über das Rechnen mit der Null handelt. Die Frage aber bleibt noch eine offene, wo und wann die Null erfunden wurde. Maximus Planudes nimmt indischen Ursprung an (s. D'Ansse de Villoison, Anecdota Graeca II, 153 Anm.). Gleichfalls für den indischen Ursprung spricht das sogenannte Scholion des Mönches Neophytus."

23) Der Ausdruck בלשון לעז kommt bei A. nur noch zu Ex. 12, 22; 16, 3 und zum Hohenliede 1, 14 und 2, 2 (ed. Mathews) und zwar stets mit italienischen Wörtern vor. Unter סִיפְּרָא ist daher wohl auch hier das italienische Wort „cifra" zu verstehen, womit ursprünglich die Null bezeichnet wurde. Das arabische Wort wird wohl nicht gemeint sein, da ein solches nie durch בלעז, sondern durch ל׳ קדר, לשון ערבי, ל׳ ערבית, ל׳ ערב, ל׳ ההגרים, ל׳ קדרים, ל׳ הגרי; לשון ישמעאל von A. bezeichnet wird. [Zu בלעז bei A. vgl. S. Salfeld „Das Hohelied Salomo's bei den jüdischen Erklärern des Mittelalters" Berlin 1879 S. 61 Anm. 1 u. S. 64 Anm. 1].

24) השרשים המרובעים ist mit „Quadratwurzeln" zu übersetzen (H hat שרשי המרובעים), nicht wie St. S. 107 „Wurzeln, Quadrate". Die 7. Pforte handelt vom Ausziehen der Quadratwurzeln, nicht auch von Quadraten.

25) אין כח במשכיל לדעת . . . אם לא . . . Dieselbe Ausdrucksweise gebraucht A. wörtlich im S. Jesod Mora S. 5 (ähnlich S. 7).

26) מוּסָד vgl. Jes. 28, 16 und 2. Chr. 8, 16. A. gebraucht das Wort öfter, so zu Ex. 3, 15 Anfang: ליסוד מוסד אני צריך und dieselben Worte Jesod Mora S. 3, wo jedoch מוסד auch Partic. Hof'al [und יסוד Substant.] sein kann, ferner Jesod Mora S. 2 im Anfangsgedicht, auch im S. ha-'Ibbur hebr. S. 9b. [Vgl. noch den Ausdruck יסוד מוסד als term. techn. für „Grundregel" in Israeli's Jesod 'Olam (S. 4, 11 u. ö.).

27) Randnote in B: „am Ende des Buches" (s. S. 88/89).

28) Die Worte (M: אחרים) כמרחק. שנים מספרים אחרים sind an sich unverständlich. M hat folgenden erklärenden Zusatz (s. hebr. S. 6 Anm. 12): „ihre Differenzen sind Einer, d. h. ihre Differenzen von der Dekade sind gleich und Einer." Der Sinn ist aus dem Zusammenhange klar, der Text scheint aber korrumpiert zu sein.

29) $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 \cdot b^2$.

30) Das Gesuchte ist hier nämlich das Quadrat der Zahl. Dieser Satz lautet algebraisch:

$$a^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^2 \cdot 10 - \left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{10a^2}{9} - \frac{a^2}{9} = a^2.$$

---

[1]) Colebrooke, „Algebra with arithmetic and mensuration, from the sanscrit of Brahmagupta and Bhâskara" London 1817.

31) $a^2 = (a - 1)^2 + [a + (a - 1)]$.

32) $a^2 = (a + 1)^2 - [a + (a + 1)]$.

33) $(a + b) \cdot (a + c) = (a + b + c) \cdot a + bc$.

34) Unter den „9 Zeichen, die ich Dir gezeigt habe," kann A. nur die neun indischen (nicht die hebräischen) Ziffern verstehen. Aus dieser Stelle geht also deutlich hervor, dass A. die nun folgenden Beispiele auch mit den Rechenbildern in indischen Ziffern versehen habe (s. Anm 20).

35) Der Zusatz in M (hebr. S. 9 Anm. 7) ist sicher unecht. Er bringt nämlich das spätere Beispiel 127×355 und giebt an, zuerst 100 mit 300, dann 100 mit 50, dann 100 mit 5 zu multiplizieren, ebenso 200 mit 300 etc. Dies stimmt aber mit der Ausführung S 10 nicht überein, wo zuerst mit der 7 multipliziert wird u. s. w. (s. d.).

36) Der mit ר״ל beginnende Zusatz in M (hebr. S. 9 Anm. 16) ist fast wörtlich im Comm. B enthalten (vgl. Anm. 14). Ebenso findet sich der nächste Zusatz in M (hebr. S. 9 Anm. 22) von יכתוב bis אחריו fast wörtlich im Comm. B.

37) Die beiden Rechenbilder, welche M hier zeigt (hebr. S. 9 Anm. 22) gehören nicht zu unserer Schrift. Sie sind bei St. S. 115 ungenau (das letztere) abgedruckt. Die dort in Anm. 215 gegebene Verweisung auf Boncompagni in Atti dell' Accad. dei nuovi lincei VI, 320 ist wohl unrichtig, da in Bd. VI S. 320 nichts Bezügliches zu finden ist.

38) Das Rechenbild in B (hebr. S. 10 Anm. 15) ist fehlerhaft, und zwar steht dreimal eine 2 statt einer 1: 225 statt 115, 620 statt 610. Das Resultat ist aber dennoch richtig hingeschrieben. Der Schreiber hat also das Rechenbild aus seiner Vorlage kopiert, ohne es zu verstehen. In B Fol. 63b oben befinden sich noch folgende, zum Teil unvollständige Rechenbilder, welche hierher gehören:

```
    127
    355                    127 —
   ----                   -------
     35                    355 —
     35,  daneben         -------
    21                      35
     10                    35
    10                       (sic)
    6
  355
 (sic)
```

Ferner am Rande rechts:

```
   1537            1537          1537
   732              732           732
 -------         -------       --------
     14           3074         324214
    21           4611          71191
   19           10759           5196
  2196          -------         350
  110           1125084          2
  355                         --------
  ·732                         1125084
 -------
 1125084
```

In B Fol. 66b oben am Rande stehen noch folgende zwei Rechenbilder, welche zum Comm. B gehören, der das Beispiel 604 × 302 enthält:

406 [1]	604
203	302
1218	1208
812	19120
82418	182408

Alles ist in älteren Zifferformen geschrieben: (s. S. 2 unten). Auch diese Beispiele verraten die Unsicherheit des Schreibers in der Anwendung der indischen Ziffern. Das entsprechende hebr. Rechenbild in B Fol. 67a sieht so aus;

ו0ד	604
ג0ב	302
אב0ח	1208
000	000
אחאב	1812
אחבד0ח	182408

Die Rechenbilder in P 1052 (Rodet, Facsimile S. 4) zeigen die richtigen Ziffern, aber in dem mit indischen Ziffern geschriebenen Bilde sind drei Reihen um eine Stelle zu weit nach rechts geschrieben, in dem mit Buchstaben geschriebenen zwei Reihen davon noch um eine Stelle mehr nach rechts (s. hebr. S. 10 Anm. 15). Gleichwohl ist auch hier das Resultat in beiden Fällen richtig hingeschrieben. Der Schreiber hat die Ziffern seiner Vorlage nachgemalt, ohne auf ihre Stellen Rücksicht zu nehmen. (Vgl. Anm. 20).

39) והוצא המחובר ט״ט. Vgl. S. ha-ʿIbbur S. 1b: והוצא הנחבר שבעה שבעה.

40) מאזנים bezeichnet also sowohl die „Probe“ selbst (s. Anm. 18) als auch die hierzu nötige „Probezahl“.

41) In B. folgt hier noch ein Stück, das in den andern Hs. fehlt und auch sicher unecht ist. Es trägt zu Anfang die Randbemerkung בנ״א אי׳, Abkürzung für בנוסחא אחרת אינו, und beginnt ענין אחר מפורש. Es enthält nochmals die Regel für das Schreiben des Multiplikators, Multiplikandus etc. Bemerkenswert ist darin der terminus für „multiplizieren“ מנה חשבון על חשבון. Als Beispiele werden angeführt 2×2; 2×22; 42×42; 26×26. Es wird bemerkt, dass man die Ziffern schreiben könne באותיות של הודו או כשלנו. Sodann folgt eine הגהה (Bemerkung), anfangend אני הנקרן שמעתי, in welcher folgende Methode für die Multiplikation der Einer angegeben wird: z. B. 9×9. $9+9=18$; der Einer von 18 ist 8, also ist 8 der Zehner des Produkts; die Differenz zwischen 8 und 9 ist 1, $1\times1=1$, also ist 1 der Einer des Produkts; mithin das Produkt 81. Ebenso wird 7×8 berechnet: $7+8=15$, also ist der Zehner des Produkts 5. Die Differenz zwischen 5 und 7 resp. 8 ist

[1]) Dieses Beispiel ist in B durchgestrichen.

2 resp. 3; $2 \times 3 = 6$, also ist 6 der Einer des Produkts. Allgemein ist nämlich:

$$
\begin{aligned}
ab &= (a+b \quad 10) \cdot 10 + (a - [a+b-10]) \cdot (b - [a+b-10]) \\
ab &= 10a + 10b - 100 + ab - a^2 - b^2 \\
&\quad - 10a - 10b + 100 - ab + a^2 + b^2 \\
&\quad - ab \\
&\quad + 2\,ab \\
\hline
ab &= \quad ab
\end{aligned}
$$

In B Fol. 66a findet sich noch folgende Multiplikationstafel des kleinen Einmaleins, die schon vorher in B Fol. 15a und am Ende desselben Stückes in einer Hs. des Britischen Museums steht (s. M. Friedländer's Essays etc. Hebrew Appendix S. 78 Anm. 2). [In St.'s Catal. Berl. hebr. Hs. S. 56 wird sie ungenau „Quadrattabelle" der Zahlen 1—100 genannt]. Die Tabelle findet sich bereits bei Nikomachus S. 96, später im Liber Algorismi des Joh. Hispalensis (ed. Boncompagni S. 103).

B

י	ט	ח	ז	ו	ה	ד	ג	ב	א
כ	יח	יו	יד	יב	י	ח	ו	ד	ב
ל	כז	כד	כא	יח	טו	יב	ט	ו	ג
מ	לו	לב	כח	כד	כ	יו	יב	ח	ד
נ	מה	מ	לה	ל	כה	כ	טו	י	ה
ס	נד	מח	מב	לו	ל	כד	יח	יב	ו
ע	סג	נו	מט	מב	לה	כח	כא	יד	ז
פ	עב	סד	נו	מח	מ	לב	כד	יו	ח
צ	פא	עב	סג	נד	מה	לו	כז	יח	ט
ק	צ	פ	ע	ס	נ	מ	ל	כ	י

Nikomachus

α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	ϑ	ι
β	δ	ς	η	ι	ιβ	ιδ	ις	ιη	ϰ
γ	ς	ϑ	ιβ	ιε	ιη	ϰα	ϰδ	ϰζ	λ
δ	η	ιβ	ις	ϰ	ϰδ	ϰη	λβ	λς	μ
ε	ι	ιε	ϰ	ϰε	λ	λε	μ	με	ν
ς	ιβ	ιη	ϰδ	λ	λς	μβ	μη	νδ	ξ
ζ	ιδ	ϰα	ϰη	λε	μβ	μϑ	νς	ξγ	ο
η	ις	ϰδ	λβ	μ	μη	νς	ξδ	οβ	π
ϑ	ιη	ϰζ	λς	με	νδ	ξγ	οβ	πα	ϟ
ι	ϰ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϟ	ρ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

42) Vgl. Jesod Mora S. 50; Israeli's Jesod 'Olam S. 4: יסוד מוסר שאתה צריך לידע כי כל מספר הוא מחובר מאחרים; Dieterici S. 2 u. 3.

43) Vgl. S. ha-Echad S. 5, S. ha-Schem S. 5a; ferner zu Ex. 3, 15: כל מספר הוא באחד בכח והוא בכל מספר במעשה und האחד סוד כל המספר ויסודו. Dasselbe bei Israeli (l. c.): הא׳ הוא שורש המספר ועיקרו.

44) Dasselbe fast wörtlich zu Ex. 3, 15 und S. ha-Echad S. 7.[1]) Vgl. auch Dieterici S. 7 u. 8. Dasselbe schon bei Nikomachus (S. 75): *Πᾶς ἀριθμὸς τῶν παρ' ἑκάτερα κειμένων συνεθέντων ἥμισύς ἐστι, καὶ τῶν ὑπὲρ ἕνα ἑκατέρωθεν κειμένων ὁμοίως ἥμισύς ἐστι. καὶ ἔτι τῶν ὑπὲρ ἐκείνους, καὶ τοῦτο μέχρις οὗ δυνατόν. Μονωτάτη δὲ ἡ μονάς, διὰ τὸ μὴ ἔχειν ἑκατέρωθεν αὐτὴν δύο ἀριθμούς, ἑνὸς μόνου τοῦ παρακειμένου ἥμισύς ἐστιν. ἀρχὴ ἄρα πάντων φυσικὴ ἡ μονάς.*

45) Denn $(a-1) + (a+1) = 2a$.

46) S. hebr. S. 14 Anm. 15.

47) In B ist der Divisor für jede Teildivision immer wieder in die entsprechenden Stellen hingeschrieben. Wie bei den Rechenbildern der Multiplikation ist eine jede Zahl des Divisors so hoch als möglich hingeschrieben:

7000 Die mittlere Null gehört demnach zu der in der unteren
77 Reihe links stehenden 7, die rechts stehende Null zu der rechts stehenden 7. — In derselben Weise sind in B die Rechenbilder der folgenden Divisionsaufgaben geschrieben.

48) Hier fehlt in B die nochmalige Division mit 90.

49) Der Glossator verstand offenbar die Worte A.'s nicht. Allerdings ist die Lesart in M (hebr. S. 15 Anm. 22) besser, aber auch B und H ist verständlich.

---

[1]) Ebenso S. Jesod Mora hebr. S. 50; das Wort מאה daselbst ist von Creizenach missverstanden worden (s. das Übers. S. 136).

50) In dem Rechenbilde steht jedoch nur **eine** 3 und mit Recht.

51) Vgl. A.'s Worte am Anfange des Buches: ואינו אלא לשמור המעלות „Die Null dient nur zur Wahrung der Stellen".

52) Der Divisor wird ausnahmsweise (hebr. S. 18 Z. 9 u. S. 20 Z. 18) המחולק statt המחולק עליו genannt.

53) Das folgende Stück, das in H und M fehlt, scheint ein unechter Zusatz zu sein, der eine Wiederholung enthält; s. jedoch hebr. S. 21 Anm 10.

54) D. h. wenn die letzte Ziffer des Divisors eine Null ist, so lässt sich diese nicht in den Dividendus dividieren.

55) Es liegen uns 3 Rechenbilder vor, 1 in B, 2 in H (hebr. S. 21 Anm. 13), die vielleicht alle vom Verfasser herrühren. Das Rechenbild in B giebt die gesamte Rechnung wieder, das mit arabischen (indischen) Ziffern in H nur die Teilreste, ebenso das in hebräischen Ziffern, jedoch sind in letzterem die Ziffern, welche unverändert bleiben, nicht noch einmal hingeschrieben und alle Ziffern möglichst tief in den entstandenen leeren Raum gesetzt.

56) Die Variante in H (hebr. S. 22 Anm. 1), welche den Gang der ganzen Rechnung wiedergiebt, scheint nicht vom Verfasser herzurühren. Die in derselben vorkommenden Ausdrücke: תשלח לאחור u. תשימהו לאחור u. ä. gebraucht A. sonst nicht, sondern stets השב אחורנית. Wir nehmen daher von der Übersetzung derselben Abstand.

57) Diese Bemerkung setzt die Figur in H mit den hebr. Ziffern voraus, fehlt aber gerade in H. In der dortigen Figur stehen thatsächlich über dem Dividendus drei 7, drei 8, drei 4, neun 5, eine 6 und eine 2 (s. hebr. S. 21 Anm. 13).

58) D. h. von dem vorhergehenden Dividendus blieb für die nächste Division stets eine **vierstellige** Zahl übrig: 1) 7784 2) 7854 3) 8554 4) 5555, aber 5) 556 (**dreistellig**).

59) Die Worte מה שתתן לאחרון bilden, wenn die Lesart richtig ist, eine parenthetische Bemerkung: Man soll aufschreiben, was man für alle unteren Ziffern als Quotienten ansetzen kann, und zwar ist dies immer dasselbe, was man für die letzte Zahl ansetzen kann. Die Worte: „Schreibe auf, was Du allen andern u. s. w." beziehen sich nicht auf die folgende Teildivision, sondern auf die erste Division, bei welcher man Rücksicht nehmen muss, ob der für die vorderste untere Zahl angesetzte Quotient auch für die andern Zahlen der unteren Reihe passe.

60) Die folgenden Beispiele, in deren Auseinandersetzung Ausdrücke vorkommen, die A. sonst nicht anzuwenden pflegt (wie נסיר statt נקח u. ä.) sind nach den oberen mannigfaltigen Beispielen ein überflüssiger Zusatz und gehören dem Verfasser wohl nicht an (fehlen daher in H und M), selbst wenn man das vorhergehende Stück, beginnend mit „Regel der Division" (fehlt in H), als eine kurze Zusammenfassung für echt zu halten geneigt wäre.

61) D. h. wenn kein Rest blieb [מספר שנשאר שהוא פחות מהמספר שחלקת עליו = „Rest"].

62) H: „in den **griechischen** Büchern". Man findet denselben Ausspruch bei Nikomachus S. 74: *Ἀριθμός ἐστι πλῆθος ὡρισμένον ἢ μονάδων σύστημα.*

63) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n\,(n/_2 + {}^1/_2)$.

64) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = (n + 1) \cdot n/_2 = n\,(n/_2 + {}^1/_2)$ (s. Anm. 63). Diese Formel wird gewöhnlich von den arabischen Schriftstellern angegeben; vgl. Dieterici S. 14.

65) M giebt hier noch die Formel (in Worten): $1 + 2 + 3 + \ldots + n = 2\,(n/_2)^2 + n/_2$ (s. Anm. 63 u. hebr. S. 25 Anm. 13) und als Beispiel: $1 + 2 + 3 + \ldots + 12 = 2\,(6)^2 + 6 = 78$.

66) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n^2 + n}{2}$ (s. Anm. 63). Bei dem Mangel der Buchstabenrechnung erschien jede dieser Formeln (Anm. 63–66) als eine besondere Methode. A. kommt es auch hier nur auf die praktische Lösung an, nicht auf die Theorie der Formel.

67) Dieselbe Aufgabe finden wir in Misrachi's Sefer ha-Mispar מאמר ג' חלק א' פרק ב'. Vgl. **Wertheim** (s. Einleitung) S. 32 Nr. 46.

68) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n) \cdot ({}^2/_3\,n + {}^1/_3) = n/_2\,(n + 1)\,\frac{(2n + 1)}{3} = n/_6\,(n + 1) \cdot (2n + 1)$.

69) H giebt noch folgende Lösung an (s. hebr. S. 26 Anm. 12): „Nimm die Zahlensumme bis 12 einschliesslich, das ist 78, und nimm ${}^2/_3$ von 13, d. i $8^2/_3$, subtrahiere davon ${}^1/_3$, ist $8^1/_3$, und multipliziere $8^1/_3$ mit 78, so erhältst Du 650". Ausserdem hat H noch folgendes: „Heisst die Aufgabe: Wieviel ist die Summe der Quadratzahlen bis 8? so nimm die Zahlensumme bis 8, d. i. 36, nimm ${}^2/_3$ von 9, ist 6, multipliziere 6 mit 36, ist 216, und subtrahiere davon ${}^1/_3$ von 36, d. i. 12, so erhältst Du 204. Aufgabe: Wieviel ist die Summe der Zahlen von 4 bis 9? Verfahre wie oben. Multipliziere 5 mit 9, ist 45, und subtrahiere davon $2 \times 3 = 6$, so erhältst Du 39. Fragt man nach der Summe der Quadratzahlen von 4 bis 9, so verfahre wie oben. Nimm die Zahlensumme = 45, behalte sie, nimm ${}^2/_3$ von 9, ist 6, multipliziere 6 mit 45, giebt 270, addiere dazu ${}^1/_3$ von 45, d. i. 15, giebt 285, und subtrahiere hiervon das Quadrat von 1, 2 und 3, d. i. 14, so bleiben 271. Auf solche Weise kannst Du alle Aufgaben dieser Art rechnen".

70) $a + 2a + 4a + 8a + \ldots + 2^n a = 2^{n+1} a - a$; da ja allgemein $a + ad + ad^2 + \ldots + ad^n = a\left(\frac{d^{n+1} - 1}{d - 1}\right)$. Vgl. Nikomachus S. 64: *πρῶτον μὲν γὰρ συνέστηκεν ἐκ τοῦ διπλασίου καὶ τοῦ*

τριπλασίου τῶν κατὰ τὸ ἑξῆς συντεθειμένων διπλασίων μὲν α β δ η, ταῦτα δέ ἐστι ιέ, τριπλασίων δὲ α γ ϑ κζ, ἅπερ εἰσὶ μ.

71) Die astronomischen Tafeln enthalten gewöhnlich den Mittellauf, welcher durch die Äquation (תקון) [vgl. Pforte VI gegen Ende: ועתה אפרש דרך חכמי המזלות בספרי לוחות תקון המשרתים] rektifiziert wird. (St. Z. D. M. G. XXIV S. 381 Anm. 83 und XXV S. 413).

72) Hierzu bemerkt Comm. B.: כגון האומות המונין לשמש ועושין מחזורים מכ׳ כ׳ שיזכרו מהלך כל משרת בזה המספר מן השנים. „Z. B. die Völker, welche nach der Sonne zählen und Cyklen von je 20 Jahren machen, indem sie den Lauf eines jeden Planeten in dieser Anzahl von Jahren angeben".

73) St. Z. D. M. G. XXIV S. 381 meint, dass שנות מח(ו)ברים sich auf die Conjunction beziehe. „Die Conjunction vom Juppiter (צדק) und Saturn (שבתי) im Widder (מזל טלה) kehrt alle 960 Jahre wieder, am Ende von je 20 Jahren vereinigen sie sich in einem der feurigen Zeichen (des Zodiak)" [s. d.].

74) Hierzu bemerkt Comm. B.: כי הם ימנו תחלת היום מחצי היום „denn sie zählen den Anfang des Tages von Mittag". Vgl. dazu Israeli's Jesod 'Olam S. 26 Col. 2 Z. 37 ff.: עת חצות היום . . . ועי״ז הסכימו רוב המחשבים למהלך הכוכבים לשום אותו תחילת כל יום מימי השבוע וראשיתו.

75) Ein Rechenbild für eine derartige Addition bei Benützung astronomischer Tabellen findet sich am Ende unseres Buches in B (Fol. 111 b) und zwar so: 15 J. 10 Mon. 10 Tg. 8 Std.

נן*	כ	ח	י	י׳ שנים [die שנות הכלל]
טו	י	ד	ה	ה׳ שנים [" הפרט "]
כה	ד	ו	ח	י׳ חדשים
כ	ח	ד	ו	י׳ ימים
מ	ל	כ	י	ח׳ שעות
	המחובר			
י	יד	יג	ד	

″	′	°	Sternbilder	
30	20	8	10	10 Jahre
15	10	4	5	5 „
25	4	6	8	10 Mon.
20	8	4	6	10 Tage
40	30	20	10	8 Stund.
	Summe			
10	14	13	4	

76) Comm. B tadelt diese Art der Subtraktion A.'s mit den Worten: זהו דרך בן עזרה ואין זה סדר נכון. „Dies ist der Weg ibn Esra's, es ist aber nicht die richtige Reihenfolge", weil sich das Resultat der vorderen Reihen durch Entnahme von Zehnern für die hinteren Ziffern noch ändern könne, und schlägt daher vor, die Subtraktion bei den Einern zu beginnen: אבל הסדר היותר נכון כמו שנהל בחבור למנות מהאחדים.

---

*) Fehler statt ל.

Vermutlich hat A. diesen Weg absichtlich bei der Subtraktion analog der Division gewählt, während er die Methode der Addition der der Multiplikation nachgebildet hat. Sowohl Khowarezmi (ed. Boncompagni S. 9) als Joh. Hispalensis (S. 32–35) schlagen denselben Weg ein wie A.

77) D. h. bei der Multiplikation von Brüchen mit gleichen Nennern dividiert man das Produkt der Zähler mit dem Quadrate des Nenners.

78) A. nennt, wie alle arabischen Mathematiker, Brüche, deren Nenner Primzahlen über 10 sind, „Brüche, die man nicht aussprechen kann“, weil es im Hebr. für die Bruchteile Elftel u. s. w. kein Wort giebt. Man sagt in diesem Falle: 1 Teil von 11. Vgl. Dieterici S. 3, 6 und 186, wo 11 als die Zahl mit unaussprechlichen Teilen bezeichnet wird („aṣṣammu“). Damit ist nicht zu verwechseln das bei den griechischen Arithmetikern gebräuchliche ἄρρητος („unaussprechlich“), welches die Irrationalzahl bezeichnet.

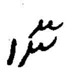
79) Vgl. Sefer ha-Schem S. 5a: ואיננו מספר und Jesod ʻOlam S. 4: כי הא' אינו מהמספר ר״ל ממין המספר.

80) So sagt A. im Jesod Mora ausdrücklich, dass von den 10 Zahlen nur 8 als Grundzahlen zu betrachten seien, da 1 keine Zahl, 10 bereits eine Dekade (כלל) sei. Die 8 Zahlen entsprechen den 8 Sphären der 7 Planeten und des Zodiak (ח' גלגלים Jesod Mora S. 46). Es giebt also bald 8, bald 9, bald 10 Grundzahlen (vgl. zu Ex. 3, 15 und oben Anm. 4 und 5).

81) Mehrstellige Nenner werden nach Art der Araber aus sprachlichen Rücksichten, wenn möglich, zerlegt (vgl. Anm. 78).

82) Die Multiplikation von 36 × 49 ist im Rechenbilde nach A.'s Methode ausgeführt.

83) Nämlich $^1/_5$ von 20.

84) So bezeichnet A. den Zähler des gebrochenen Bruches, während er den oberen Bruch einen Bruch zweiter Stufe nennt. Die Bezeichnung stammt daher, dass Zähler und Nenner wie bei uns übereinander geschrieben wurden, jedoch ohne Bruchstrich (Anm. 116). So schrieben die Araber  = $^3/_{13}$, ebenso im Sanskrit  (vgl. Rodet S. 23/24).

85) In B steht $6^8/_7$ (statt $6^7/_8$); was hinreichend beweist, dass der Schreiber die ihm vorliegenden Ziffern nicht genügend verstand (s. Anm. 38).

86) Hier liegt ein Versehen A.'s vor, da Sechstel in dem Beispiel gar nicht vorkommen, vielmehr 6 im Zähler steht. Der Hauptnenner ist demnach zu hoch angesetzt, er müsste 840 (statt 1680) heissen.

87) Dieselbe Aufgabe in Misrachi's S. ha-Mispar מאמר ג' חלק א' פרק א' (4. Aufg.), bei Wertheim S. 26 Nr. 4.

88) In M folgt hier der erste Zusatz beginnend mit der Chiffre אמ״ש = אמר משה שואבי (s. Anm. 164). Derselbe lautet: אמ״ש זאת השאלה והדומות אליה גם כל השאלות אשר זכרם המחבר בזה השער הנה כלן תתבארנה במופת מתמונת י״ט מ׳ ז׳ מאוקלידים כי הם כלם מענין (ה)כפל הקצוות בערכין וחלק היוצא על האמצעי ועל זה השורש נכנה השער הששי מזה הספר והוא שער הערכין ואני תמה למה שם המחבר אלו השאלות ודומיהן בזה השער כי לפי האמת היה לו לאחרם עד השער הששי כי הם כשער הערכין ואמנם לבעבור יתבאר בזה השער חבור השברים שם מהם קצתם פה עכ״ת. . . „Mose Soavi bemerkt: Diese Aufgabe und ähnliche, ja alle Aufgaben, welche der Verf. in dieser Pforte anführt, werden alle erläutert durch Beweis vermittelst Figur 19 des 7. Buches von Euklid. Sie alle gehören nämlich zur Methode der Multiplikation der Eckzahlen bei Proportionen und Division durch die mittlere, und nach dieser Grundrechnung ist die 6. Pforte dieses Buches benannt, nämlich die Pforte der Proportionen. Ich wundere mich also, warum der Verf. diese Aufgabe und ähnliche in diese Pforte gesetzt hat, denn eigentlich hätte er sie aufsparen sollen bis zur 6. Pforte, da sie zur Pforte der Proportionen gehören. Weil aber in dieser Pforte die Addition der Brüche erläutert wird, hat er einige von ihnen hierher gesetzt. So weit die Bemerkung“. Der hier citierte 19. Lehrsatz in Buch VII des Euklid lautet: Ist $a : b = c : d$, so ist $ad = bc$.

89) Eine ähnliche Aufgabe im S. ha-Mispar des Misrachi מאמר ג׳ חלק א׳ פרק א׳ (s. Wertheim S. 26 Nr. 5).

90) Dass A. statt $^4/_{45}$ schlechthin 4 sagt, darf nicht eben auffallen, da er die 4 als Ganze betrachtet, welche von 45 genommen sind, nicht als $^4/_{45}$ eines Ganzen (s. Übers. S. 31).

91) Es muss heissen $^1/_9$ und im Texte (hebr. S. 39 Anm. 33) gelesen werden: והיתרון שיש בין התשיעית (statt החמישית) והשביעית oder diese 5 Worte sind überhaupt zu streichen. Die Erwähnung der Differenz zwischen $^1/_5$ und $^1/_7$ ist für die folgende Rechnung ohne Belang. Da A. hier sehr kurz im Ausdrucke ist, so stellen wir hier die gesamte Rechnung nach A. dar. Das für das Verständnis des Textes Notwendigste haben wir der Übersetzung in Parenthese beigefügt.

Aufgabe: Addiere $^1/_5 + ^1/_7 + ^1/_9$!

1. Lösung nach A.

$^1/_5 + ^1/_7 + ^1/_9 = ^1/_9 + ^1/_9 + ^1/_9 + (^1/_5 - ^1/_9) + (^1/_7 - ^1/_9) = ^3/_9 + ^4/_{45} + ^2/_{63}$.

Für jedes Fünfundvierzigstel setze ich wiederum den Bruch mit dem kleineren Nenner, $^2/_{63}$, so ist

$$^4/_{45} = ^8/_{63} - (^8/_{63} - ^4/_{45}) = ^1/_9 + ^1/_{63} - (^8/_{63} - ^4/_{45}),\ \text{also}\ ^1/_5 + ^1/_7 + ^1/_9 = ^4/_9 + ^3/_{63} - \left(\frac{^8/_7 - ^4/_5}{9}\right) = ^4/_9 + ^3/_{63} - \left(\frac{8 - ^{28}/_5}{63}\right) = ^4/_9 + ^3/_{63} - \frac{2^2/_5}{63} = ^4/_9 + \frac{^3/_5}{63} = ^4/_9 + \frac{\frac{\frac{3}{5}}{7}}{9}.$$

In M bemerkt Mose Soavi zu dieser Stelle: אמ״ש בקשתי להישיר לשון החכם ר׳ אברהם בן עזרא ז״ל בזאת השאלה ולא יכולתי כי נראה לי שהלשון חסר ומעות מאד כי איננו כולל לכל דרכי השאלות שתהיינו בזה המין לכן נראה לי להשלים הלשון לפי כוונתי אם שהיתה זאת כוונת ר׳ אברהם או לא לפי הנסח הדרך האחת שהתשיעית פחותה משאר השברים האחרים הנה נחשוב כי הם שלש תשיעיות והיתרון שיש בין חמישיות והתשיעיות ד׳ והם ד׳ חמישיות [התשיעית .sc] והיתרון שיש בין התשיעית [s. Anf. dieser Anm.] והשביעית ב׳ והם ב׳ שביעיות התשיעית ומפני שהשביעית פחותה מהחמישית נשים הד׳ חמישיות התשיעית ד׳ שביעיות התשיעית ונצרף אותם עם השתי שביעיות התשיעית תהיינה ששה שביעיות התשיעית ונשמרם ונשאר לנו עוד היתרון שיש בין הד׳ חמישיות התשיעית ובין הד׳ שביעיות התשיעית והנה היתרון בין החמישית והשביעית ב׳ והנה נכפול ב׳ על ד׳ יעלו ח׳ והם שמנה חמשיות שביעית התשיעית ונעשה מן החמשה חמשיות שביעית אחת ונשאר לנו שלשה חמשיו׳ שביעית התשיעית ונקח השביעית האחת ונחברנה עם הששה שביעיות השמורות תהיינה שבעה שביעיות התשיעית שהם תשיעית אחת ונחברנה עם השלשה תשיעיות ותהיינה ארבע התשיעיות ושלשה חמישיות שביעיות התשיעית ע״כ. Danach soll die Rechnung so sein:

$$^1/_5+{}^1/_7+{}^1/_9={}^1/_9+{}^1/_9+{}^1/_9+\frac{^4/_5}{9}+\frac{^2/_7}{9}={}^3/_9+\frac{^6/_7}{9}+4\left(\frac{^1/_5}{9}-\frac{^1/_7}{9}\right)={}^3/_9$$

$$+\frac{^6/_7}{9}+4\left(\frac{\frac{\frac{2}{5}}{7}}{9}\right)={}^3/_9+\frac{^6/_7}{9}+\frac{\frac{\frac{8}{5}}{7}}{9}={}^3/_9+\frac{^6/_7}{9}+\frac{^1/_7}{9}+\frac{\frac{\frac{3}{5}}{7}}{9}={}^4/_9+\frac{\frac{\frac{3}{5}}{7}}{9}.$$

Die Worte A.'s נכפול ב׳ על ד׳ יעלו ח׳ נעשה מן הז׳ תשיעית אחת „wir multiplizieren 2 mit 4, giebt 8, und machen aus 7 ein Neuntel" weisen darauf hin, dass diese 7 Dreiundsechzigstel sind, was nur bei der ersten von uns gegebenen Lösung der Fall ist. Die Worte A.'s sind zwar knapp, aber nicht unverständlich. — Comm. B bemerkt zu A.'s Lösung: הדרך הראשונה לא מצאנוה נמשכת בכל החשבונות ומורינו ז״ל מצא דרך נכונה נמשכת בכל החשבון שיש לו דלוג אחד או דלוג שנים או יותר והוא שיהיה הדלוג שוה והוא שנקח מספר האמצעי לכל אחד כי הוא משותף ביניהם ונחשב ג׳ פעמים זה המספר כי הוא כמחובר משלשתם ונקח זה הערך מהמורה כלו׳ שנקח בכאן ג׳ שביעיות מהמורה אם היו ג׳ חמשיות נקח ג׳ חמשיים מהמורה ואחר נכפול היתרון שבין הראשון והשלישי על הדלוג שיש בין כל אחד והעולה נחברהו עם מה שיהיה לנו כי הם חלקי׳ מהמורה ועיין בזה החשבון והיה כן והוא ג׳ שביעיות שמ״ו וערך ח׳ חלקים משמ״ו שכל אחד חמישית שביעית התשיעית או בהפך או תאמר שהוא שביעית התשיעית וג׳ חמישיות שביעית התשיעית ועיין בחשבון. Nach Comm. B ist die Lösung also folgende:

$$^1/_5+{}^1/_7+{}^1/_9={}^1/_7+{}^1/_7+{}^1/_7+({}^1/_5-{}^1/_7)-({}^1/_7-{}^1/_9)=\frac{135+18-10}{315}$$

$$={}^3/_7+\frac{\frac{\frac{8}{5}}{7}}{9}+={}^2/_7+\frac{^1/_7}{9}+\frac{\frac{\frac{3}{5}}{7}}{9}.$$

92) Dieselbe Aufgabe in Misrachi's S. ha-Mispar מאמר ג׳ חלק א׳ פרק א׳ (s. Wertheim S. 26 Nr. 6).

93) Dieselbe Aufgabe bei Misrachi. Über diese auch in modernen

Rechenbüchern häufig anzutreffende Aufgabe vgl. Näheres bei W e r t h e i m S. 26 Nr. 10.

94) In M stellt Mose Soavi folgende Proportion auf: $1:2^3/_4 = x$ [מספר האנשים הנעלם] : 99 (M falsch 79), also [nach Euklid (Elementa) VII, 13: Wenn $a:b = c:d$, so ist $a:c = b:d$] $1:x = 2^3/_4 : 99$, ferner ist [nach Euklid VIII, 17] $11:396 = 2^3/_4 : 99$, also $11:396 = 1:x$, $x = {}^{396}/_{11} = 36$.

95) Dieselbe Aufgabe bei Misrachi מאמר ג׳ חלק א׳ פרק ב׳ (1. Aufg.) s. W e r t h e i m S. 30 Nr. 41.

96) Hierzu bemerkt Mose S. in M, dass diese Art der Lösung nicht in allen Aufgaben zum richtigen Resultat führe. Wenn er z. B. $^3/_5$ L. für 19 P. kauft und immer $^3/_7$ L. für 19 P. verkauft, so sind $^3/_7$ des Nenners = 15, „und wenn wir sagten, dies wäre die Summe, so würden wir irren, denn bei 15 P. verdient er 6 P.“ Er fährt fort: ולזה יראה לי שהשלמת הלשון יהיה על זה הדרך בקש המודה והוא ל״ה שהוא כפל ה׳ על ז׳ והוא שלש חמישיותיו כ״א וד׳ שביעיותיו כ׳ (י״ב nicht) ראה מה המכר הוא עשרים דמיונו וככה ערך ממונו אל מה שהרויח אבל מה שהרויח היה פשוט אחד א״כ ממונו היה כ׳ פשוטים. A. hat jedoch mit seiner Kürze recht. Bei 20 L. verdient er 1 L., folglich bei 20 P. 1 P., also war die Summe auch 20. Die Differenz zwischen $^3/_5$ und $^4/_7$ beträgt im Zähler gerade 1, was im Beispiel des Mose S. nicht der Fall ist.

97) Der Name ist in den hebr. Quellen verschieden geschrieben. In der von St. edierten Vorrede A.'s zu seinem Übersetzungswerke „Gründe der Tabellen“ [טעמי הלוחות] heisst es: בטלמיוס הוא הנקרא תלמי. Im S. ha-Schem nennt er ihn ebenfalls בטלמיוס.

98) D. h. die im folgenden geschilderte Sexagesimalteilung wird ursprünglich auf das runde Himmelsgewölbe angewendet, kann aber auch auf alles nicht Kreisförmige angewendet werden.

99) Im Liber Algorismi des Joh. Hispalensis (ed. Boncompagni S. 103) findet sich eine Multiplikationstafel der Sexagesimalbrüche, ähnlich der Tafel in Anm. 41 für die Einer.

100) In B fehlt die vorletzte Reihe, das Rechenbild in M ist genauer.

101) Die Verwechselung des Mathematikers Ptolemaeus mit dem gleichnamigen Könige findet sich in jüdischen Quellen häufig; vgl. S. ha-'Jbbur S. 10a.

102) Der Name hat in den Hss. die mannigfachsten Schreibungen erfahren: אריסמידש. ארסימידיש, ארשמידס, ארישמדס, ארשמידיש. Nach St. (S. 116 Anm. 218) acceptierte A. wahrscheinlich die arabische Form ארשימידאס. (Vgl. auch S. ha-Schem Cap. VI Anfang). Für die Willkür der Schreiber hierin diene folgendes Beispiel: In B Fol. 113a ist auf derselben Seite Euklid einmal איקלידיש, das andere Mal איקלידיס geschrieben.

103) Dies ist nicht ganz richtig. Archimedes beweist in seiner „Kreismessung" nur, dass *Παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστί, καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου μείζονι δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις.* (nicht $3\frac{10}{70^1/_2}$). Im S. ha-Schem Cap. VI nennt A. $^{10}/_{71}$. $3\,^1/_7 = 3,1428714287\ldots$; $3\frac{10}{70^1/_2} = 3,1418439716\ldots$; $3^{10}/_{71} = 3,1408450704$. In Wahrheit ist $\pi = 3,1415926535\ldots$ S. auch S. 87/88 der Übersetzung.

104) $3 + {}^8/_{63} + {}^1/_{120}$ $(= 30'') = 3^{961}/_{7560} = 3,12711653439$. Nach H: $3^8/_{60} + {}^1/_{120} = 3^{17}/_{120} = 3,141666\ldots$, was daher die richtigere Lesart ist. Im S. ha-Schem Cap. VI giebt A. im Namen des Ptolemaeus $3^0 8'$ an; vgl. S. 88 der Übersetzung.

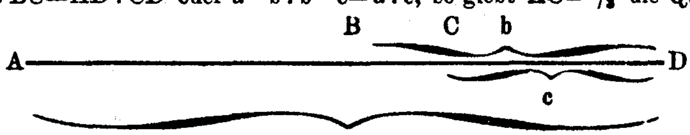
105) Übersetzt nach dem Comm. B: דע כי אותם השנים יחשבו כאלו הם מספר אחר.

106) Ist $a:b=c:d$, so ist $a^2+b^2+c^2+d^2=(a+d)^2+(b-c)^2=a^2+2ad+d^2+b^2-2bc+c^2=a^2+b^2+c^2+d^2$, da $bc=ad$.

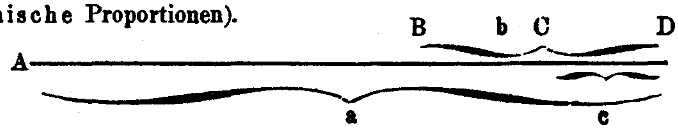
107) Ist $a:b=c:d$, so ist $a^2+b^2+c^2+d^2=(b+c)^2+(a-d)^2=b^2+2bc+c^2+a^2-2ad+d^2=a^2+b^2+c^2+d^2$, da $bc=ad$.

108) תקון bezeichnet nicht eigentlich die „Bestimmung", sondern die „Verbesserung", „Korrektur". Hier ist die durch die Äquation zu regulierende Stellung nach der mittleren Bahn gemeint, vgl. S. 26 unten und Anm. 71.

109) Man beachte hier den Ausdruck ערך בין für das arithmetische Verhältnis, ערך אל für das geometrische Verhältnis. a, b, c bilden eine musikalische (harmonische) Proportion, wenn $a-b:b-c=a:c$, und zwar ist dies eine stetig-harmonische Proportion, weil sie nur aus 3 Gliedern besteht; die allgemeine Form einer 4gliedrigen harmonischen Proportion ist $a-b:c-d=a:d$. Ist AD eine gespannte Saite, B ihr Mittelpunkt, so dass AB in der höheren Oktave von AD erklingt und verhält sich $AB:BC=AD:CD$ oder $a-b:b-c=a:c$, so giebt $AC={}^2/_3$ die Quinte.



Ist aber AB, wie in folgender Figur $= {}^3/_5$ AD und $AB:BC = AD:CD$, so giebt $AC = {}^4/_5$ die Terz. Die drei Saiten AD, AC und AB erzeugen also den **harmonischen** Dreiklang: Grundton, Terz und Quinte. Daher heissen diese Proportionen ערכי הנגינות (**harmonische** Proportionen).



110) Vgl. hebr. S. 46 Note 19 den Zusatz in B. Dieser ist sicher unecht und hier sinnlos, da ja bei 3 Grössen a, b, c immer $(a-b)+(b-c)=a-c$. In H und M fehlt dies mit Recht.

111) Die Null gebraucht A. an Stelle unseres x als Zeichen für die gesuchte Zahl, jedoch nur bei Proportionen, wo er ein Rechenbild aufstellen will. Dieser Gebrauch ist (Rodet S. 23) ganz indisch; wir finden hierfür unzählige Beispiele bei Bhâskara und Brahmagupta (s. Anm. 22 Note 1). Die Null hatte eben den Zweck, die Stelle einer fehlenden Zahl zu besetzen.

112) In P 1052 (Rodet) sind die Proportionen stets in folgender Weise geschrieben: $\boxed{\begin{array}{c|c} \frac{10}{107} & \frac{0}{210} \end{array}}$ Rodet hebt (S. 22) die Analogie dieser vierteiligen Figur mit unsern Determinanten hervor, deren Gleichung sich in die entsprechende Proportion auflösen lässt.

113/114) Dieselbe Aufgabe im S. ha-Mispar des Misrachi מאמר ג׳ חלק א׳ פרק א׳ s. Wertheim S. 26 Nr. 8 u. 9.

115) ערך י״ב אל ט׳. Diese Stelle entging dem Mathematiker Jacob Eichenbaum (vgl. Kerem Chemed IV, S. 113) und S. D. Luzzatto in Padua (gest. 1865) (s. Zeitschrift Zion, 1. S. 116; Israel. Annalen II (1840) S. 75; Kerem Chemed VII, S. 75), welche beide darin übereinstimmen, dass A. das Wort ערך nur vom Verhältnis des Kleineren zum Grösseren gebrauche. Hier findet einmal das Gegenteil statt, ebenso hebr. S. 54 Z. 1 (richtiger als dort in B). Gleichwohl wird ערך zumeist vom Verhältnis des Kleineren zum Grösseren gebraucht, vgl. Jesod Mora S. 131, zu Ex. 3, 15 und den Superkommentar Samuel Motot's daselbst (Ed. Venedig Fol. 19c). Vgl. auch S. 88 (Anm. 166) wo absichtlich vermieden wird, vom Verhältnis des Grösseren zum Kleineren zu sprechen.

116) Dieselbe Aufgabe bei Misrachi im S. ha-Mispar מאמר ג׳ חלק א׳ פרק א׳ (s. Wertheim S. 27 Nr. 17).

117) D. h. für $^{143}/_{315}$ Gulden würde er von jeder Sorte 1 Denar erhalten.

118) Dieselbe Aufgabe im S. ha-Mispar des Misrachi מאמר ג׳ חלק א׳ פרק א׳ (2. Aufg.), s. Wertheim S. 26 Nr. 2.

119) Die 3 rechts von der 10 bedeutet $^{3}/_{13}$. Vgl. über Schreibung der Brüche hebr. S. 51 Note 35 und oben Anm. 84.

120) H, M, M 150 und R (s. hebr. S. 52 Note 31) haben noch folgendes: „d. i. $^{8}/_{13}$ [denn $^{1}/_{13}=17$] $+\frac{\frac{1}{17}}{13}$ oder, wenn Du willst, sind es $^{10}/_{17}$ [denn $^{1}/_{17}=13$] $+\frac{\frac{7}{13}}{17}$." Die „unaussprechbaren" Brüche werden stets in Produkte oder Summanden zerlegt.

121) Eine ähnliche Aufgabe bei Misrachi מאמר ג׳ חלק א׳ פרק א׳ (s. Wertheim S. 27 Nr. 18).

122) 4, nicht 5 wie in B. Bei Misrachi (l. c.), wo sich dieselbe Aufgabe findet, steht ebenfalls 4. Vgl. Wertheim S. 27 Nr. 21.

123) Dieselbe Aufgabe bei Misrachi מאמר ג׳ חלק א׳ פרק ב׳ (s. Wertheim S. 31 Nr. 42).

124) S. Anm. 115.

125) Dieselbe Aufgabe in gleicher Ausführlichkeit bei Misrachi מאמר ג׳ חלק א׳ פרק א׳ (s. Wertheim S. 29 Nr. 33).

126) Eine ähnliche Aufgabe mit anderen Zahlen bei Misrachi (l. c.) (s. Wertheim S. 27 Nr. 20).

127) Dieselbe Aufgabe bei Misrachi (l. c.) (s. Wertheim S. 27 Nr. 19).

128) Bei Misrachi (l. c.) finden wir dieselbe Aufgabe, nur sagt er statt ממונו „sein Geld“ שדותיו „seine Felder“ (s. Wertheim S. 29 Nr. 34).

129) Vgl. die Mischna im Traktat כתובות X,5: וכן היו כותבין בירושלים שעות.

130) Die Entscheidung, welche A. hier den Weisen Israels zuschreibt, beruht, wie bereits Comm. B bemerkt, auf der Mischna im Traktat בבא מציעא I,1: „Wenn zwei ein Gewand erfasst halten, davon ein jeder behauptet, dass es ihm ganz gehöre, so schwöre ein jeder, dass ihm nicht weniger als die Hälfte gehöre, und sie teilen es. Behauptet der eine, das Ganze gehöre ihm, der andere, die Hälfte gehöre ihm, so schwöre ersterer, dass er nicht weniger als $^3/_4$ Anteil daran habe, letzterer, dass er nicht weniger als $^1/_4$ Anteil daran habe; der erste erhält $^3/_4$, der zweite $^1/_4$.“ Es wird nämlich die eine Hälfte, die der zweite gar nicht beansprucht, dem ersten ganz zugesprochen und die andere Hälfte geteilt. [Die Arithmetiker würden dagegen im Verhältnis 2 : 1 teilen.] Dieselbe Vorschrift finden wir, — und dieser Fall entspricht mehr dem unsrigen —, im Traktat כתובות X, 4 (Talmud Fol. 93 a). Dort heisst es: „Wenn jemand drei Frauen hinterlässt, deren Verschreibung 100, 200 und 300 beträgt, im ganzen aber nur 100 vorhanden sind, so teilen sie zu gleichen Teilen.“ Hierzu bemerken רש״י und R. ‘Obadja de Bertinoro, die 3 Verschreibungen seien zu derselben Stunde unterzeichnet worden, so dass das Haftrecht einer jeden Frau an den Gütern des Mannes gleich stark sei, oder es seien nur bewegliche Güter vorhanden, bei welchen es kein Haftrecht gebe (s. Anm. 128). Sie teilen gleich, weil der Anspruch auf die vorhandenen 100 von den 3 Frauen gleichmässig erhoben werde.

„Sind jedoch 300 vorhanden“, so heisst es später in derselben Mischna, „so erhält die erste 50, die zweite 100, die dritte 150.“ Hierauf fragt der Talmud: „Da die ersten 100 von allen dreien gleichmässig beansprucht werden, so sollte doch von diesen eine jede [also die erste überhaupt nur] 33 $^1/_3$ erhalten?“ und antwortet darauf, die Mischna habe hier den Fall im Auge, dass II auf ihren Anteil an den ersten 100 I gegenüber verzichtet. Demnach teilen I und III die ersten 100, jeder von ihnen erhält 50. II hatte nur I gegenüber auf den Anteil an den ersten

100 verzichtet, nicht aber III gegenüber, fordert also jetzt von III die Hälfte der von den ersten 100 auf III gefallenen 50; III muss also 25 an II abgeben. Nun teilen II und III die zweiten 100, jeder von ihnen erhält davon 50. Die dritten 100 nimmt dann III allein. „Danach erhält doch II $25 + 50 = 75$“, so fragt hierauf der Talmud, „während die Mischna 100 für II angiebt?“ Darauf giebt der Talmud die Antwort, die Mischna spreche hier von dem besonderen Falle, dass III auf ihren Anteil an den ersten 100 verzichtet habe. Durch diese Antwort wird die vorher gegebene Antwort (s. oben) aufgehoben. Da III auf ihren Anteil an den ersten 100 verzichtet, so teilen I und II die ersten 100, II und III die zweiten 100, die dritten 100 erhält III im ganzen: folglich nimmt I 50, II 100, III 150. Eine zweite Antwort des Talmuds nimmt an, dass die Mischna einen Fall bespreche, in welchem eine zweimalige Verteilung notwendig wurde: zuerst waren nur 75 da, dann erst kamen noch 225 hinzu. Die ersten 75 werden gleichmässig zu je 25 an I, II, III verteilt. Nun hat I noch einen Anspruch auf 75; diese werden wieder gleich geteilt, also erhält I noch 25, im ganzen 50. II erhält 50 und die Hälfte der mit III strittigen zweiten 100, im ganzen also 100, das Übrige erhält III, d. h. 150. Hierauf bemerkt der Talmud, dies alles sei die Ansicht R. Natan's, R. Jehuda ha-Nasi dagegen bestimme, alle sollten בשוה „in gleicher Weise“ teilen. In der Auffassung dieses Ausspruches des R. Jehuda sind die Erklärer und Decisoren verschiedener Meinung. Einige nehmen seinen Ausspruch wörtlich, so dass die 300 gleichmässig an I, II, III mit je 100 verteilt werden sollen, indem dies nicht einer Gesellschaftsrechnung zu vergleichen sei, vielmehr das Haftrecht aller gleich stark sei und sich nicht nach dem Verhältnis der Höhe der Forderungen zu einander richte (vgl. רש״י daselbst). Andere fassen die von R. Jehuda festgesetzte „gleichmässige“ Verteilung so auf, dass man nach dem Verhältnisse ihrer Forderungen [wie hier die חכמי החשבון] proportioniert teilen solle, also $I = {}^1/_6 = 50$, $II = {}^2/_6 = 100$, $III = {}^3/_6 = 150$ [selbst bei einmaliger Verteilung und ohne Verzichtleisten von III; s. oben] (vgl. תוספות daselbst). R. Isaac al-Fasi berichtet, dass der Gaon R. Hai zwischen beiden Auffassungen schwankte; al-Fasi selbst tritt der ersten Auffassung bei*), ebenso Maimonides und Spätere. — Während die Halachisten diese Ansicht als rechtsgiltig betrachten, hält sich A. hier an die im Talmud zuerst angeführte Ansicht des R. Natan. Vgl. noch Israelit. Annalen 1841 S. 384 u. 398. Wenn Terquem (nachgeschrieben von Doctor im Litteraturblatt des „Orient“

*) R. Isaac al-Fasi verfasste zu dieser Talmudstelle eine ausführliche Erklärung in arabischer Sprache. Eine hebr. Übersetzung derselben findet sich in den Responsen des R. Menachem ‘Asarja aus Fano Nr. 128 (Dyhernfurth 1788. 4°.)

1845 S. 494) A.'s Lösung „**Spitzfindigkeit eines Talmudisten**" nennt, so ist diese Bemerkung ebenso unrichtig wie unsachlich.

131) S. Anm. 71. Die Rektifizierung geschieht eben mit Hilfe der „Proportionsreihe".

132) Comm. B: אך לא בתקון חמה „nur nicht bei der Bestimmung der Sonne".

133) Comm. B: „Proportionsreihe wird eine Reihe (in den astronomischen Tabellen) genannt, in welcher viele Zahlen der Reihe nach über einander stehen, und einer jeden dieser Zahlen gegenüber findet man eine Zahl in einer andern Reihe, in der ebenfalls Zahlen in dieser Ordnung über einander stehen. Diese Reihe, welche nach der Proportionsreihe steht, heisst die „fünfte oder siebente Reihe". Wir sehen zu, welche Zahl in der Proportionsreihe steht, berechnen ihr Verhältnis zu 60, ob es (z. B.) $^1/_3$ oder $^1/_4$ beträgt, und dementsprechend nehmen wir von der „fünften oder siebenten Reihe". Steht nun 60 darin (in der Proportionsreihe), so nehmen wir alles, was in der fünften Reihe steht".

134) $1' \times 1' = \frac{1}{60^2} = 1''$.

135) Comm. B hierzu: „Vor der Proportionsreihe ist eine Reihe, in welcher viele Zahlen über einander stehen, eine jede Zahl darin gegenüber einer Zahl in der Proportionsreihe; von ihr aus rückt man in die Proportionsreihe ein, sie wird genannt der „konstante Mittelpunkt". So steht z. B. in der Reihe des „konstanten Mittelpunktes" 20 und gegenüber in der Proportionsreihe 15, darunter in der Reihe des „Mittelpunktes" 21 und gegenüber in der Proportionsreihe 16, und so fort der Reihe nach".

136) Merkur, der der Sonne nächste Planet, wird im Talmud Traktat שבת Fol. 156a mit dem Beinamen ספרא דחמה „Schreiber der Sonne" benannt (s. רש״י daselbst). Vgl. auch Anm. 4.

137) St. in seiner Abhandlung „Zur Geschichte der Übersetzungen aus dem Indischen ins Arabische etc." citiert in ZDMG XXV S. 406 die Hs. München 225 Fol. 95 den Anfang einer anonymen algebraischen Abhandlung, welcher also lautet: תחלת מה שצריך לדעת קורא זה הספר הוא שלש חלקים אשר אמרם כבר מהומד אלבוארזמי [אלכוארזמי lies] בספרו והם שרשים ומרובעים ומספרים. [Der Codex ist nach St. wahrscheinlich eine Übersetzung von dem Mathematiker Mordechaj Finzi (Abbreviatur מ״פ) in Mantua 1445—1473].

138) S. Anm. 16.

139) Die Nullen werden hierbei nicht als Ziffern betrachtet.

140) Der erklärende „Zusatz" in B und H (s. hebr. S. 62 Note 23) lautet: „d. h. ist die nachfolgende ähnliche Quadratzahl Deiner Zahl näher als die vorhergehende ähnliche Quadratzahl".

141) Dasselbe im S. ha-Schem S. 16a (s. d.). Nach Osten bewegt sich die neunte Sphäre, die andern nach Westen (s. Anm. 4). A. vergleicht die Gleichartigkeit von 1 und 9, 2 und 8, 3 und 7, 4 und 6 bei der Quadratbildung der gleichartigen Begegnung der zwei Sphärenkomplexe (s. Anm. 8).

142) S. Anm. 16.

143) $a^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot b^2$.

144) $2(a^2 + b^2) - (a - b)^2 = (a + b)^2$; denn $2a^2 + 2b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$.

145) $3(a^2+b^2+c^2) - (a-b)^2 - (a-c)^2 - (b-c)^2 = (a+b+c)^2$.

146) Diese Worte sind eine Randglosse, welche anmerkt, dass $^1/_{70}$ falsch sei, es müsse $^{10}/_{70}$ heissen, daher sei die Rechnung ungenau. Diese Randglosse ist in B irrtümlich in den Text geraten. Mose Soavi in M bemerkt zu dieser Stelle: א׳מ׳ש׳ חתרתי להוציא לאור חשבונו ולא יכולתי כי מן הנראה לי שיש טעות סופר ואע״פ שנמשך טעות בכל הספרים ונראה לי שהיה ראוי להשלים על דרך זה ויעלו י״ז והם שניים וישארו עשרה נכפול אותם פעם אחרת על ששים ויעלו שש מאות נחלקם על ע׳ ויעלו שמנה והם שלישיים ויהיו הכל ל״ד ראשונים י״ז שניים ח׳ שלישיים ונשארו ארבעים ומספיק זה ע״כ. Das Resultat ist also 34′ 17″ 8‴.

147) ט״ו ist auffallend; in Comm. B fehlt es bei dieser Aufzählung.

148) A. nimmt hierdurch schon im voraus das Quadrat des Quotienten fort.

149) Damit meint A. wohl die Stelle S. 108 unten, die Verwandlung der Siebzigstel in Sechzigstel.

150) Probe: (Vgl. S. 45 die Figur).

Oder (wie S. 45 unten): $1^0\ 24'\ 51''\ 11''' = 305\,471''' \times 305\,471''' = 93\,312\,531\,841'''''' = 1\,555\,208\,864''''' = 25\,920\,148'''' = 432\,002''' = 7200'' = 120' = 2^0$ (Hierbei sind bei der Umrechnung die Reste der einzelnen Gradteile fortgelassen).

Die Ungenauigkeit beträgt also im Quadrate nicht einmal $\frac{3}{60^3} = {}^1/_{72000} = 0{,}072$. In Wahrheit ist $\sqrt{2} = 1{,}4142\,1357$ (annähernd), nach A. $= 1^0\ 24'\ 51''\ 11''' = 1{,}4142\,0108$ (annähernd), also die Differenz$=0{,}0\,000\,125$ (annähernd).

Sexten	Quinten	Quarten	Terzen	Sekunden	Minuten	Ganze
($''''''$)	($'''''$)	($''''$)	($'''$)	($''$)	($'$)	(^{0})
$\frac{1}{60^6}$	$\frac{1}{60^5}$	$\frac{1}{60^4}$	$\frac{1}{60^3}$	$\frac{1}{60^2}$	$\frac{1}{60}$	
			11	51	24	1
			11	51	24	1
			11	51	24	1
		264	1224	576	24	
	561	2601	1224	51		
121	561	264	11			
121	1122	3129	2470	678	48	1
	2	18	52	42	12	
1	44	27	2	0	0	2
[Ungenauigkeit]						

151) $2^{0}\ 50' = 2^{5}/_{6}$.

152) Hier bemerkt Mose S. in M folgendes: א׳מ׳ש׳ לא הבנתי השאלה גם לא התשובה גם כי אין התשובה ממין השאלה צ״ע. Er verstand also A.'s Worte nicht.

153) Dieselbe Aufgabe in Misrachi's S. ha-Mispar מאמר ג׳ חלק ב׳ פרק ב׳ (s. Wertheim S. 40 Nr. 92).

154) הכפל: Bereits Mose Soavi bemerkt über dieses Wort: א׳מ׳ש׳ לא ידעתי מה ר״ל באמרו הכפל אם לא ש . . . המיתר השלם והוא כפל המיתר המחוצה. „Ich weiss nicht, was er unter הכפל versteht, es sei denn, dass er damit die ganze Sehne bezeichnet, welche das Doppelte der halbierten Sehne ist;" eine ganz ungenügende Erklärung. Terquem liest „Kafal" und weiss es nicht zu erklären. St. S. 116 Anm. 216 sucht es mit „Quadrat" zu erklären, was jedoch ganz unhaltbar ist. Es wäre gar nicht abzusehen, warum gerade das Quadrat und nicht ebenso gut das gleichseitige Dreieck etc. genannt werden sollte. Überhaupt lautet die Überschrift דע כי יש בעגול דברים רבים, was alles nicht an sich zum Kreise Gehörige ausschliesst. Meines Erachtens bezeichnet der Ausdruck הכפל „die Vervielfältigung" zweifellos die Zahl π (den „Vervielfältigungsfaktor" des Durchmessers für die Berechnung der Peripherie), und es kann nicht Wunder nehmen, dass A. diese merkwürdige Zahl, von welcher er im folgenden eingehend spricht (s. S. 87) als eine besondere Erscheinung beim Kreise aufzählt. Vgl. übrigens hebr. S. 78 Z. 12 und Übers. S. 87 ואם כפלת האלכסון על ג׳ ושביעית. Unter קו העגול ist nicht der numerische Wert der Peripherie, sondern diese als geometrische Linie zu verstehen. Daher werden hier die קשתות „Bogen" (s. hebr. S. 79 Z. 16) gar nicht aufgezählt, weil sie einen Teil der Kreislinie [קו העגול] bilden. Nach Aufzählung von Peripherie und Durchmesser nennt A. folgerichtig zunächst das Verhältnis beider zu einander oder, wie er es bezeichnet, „das Vielfache", „den Faktor" (π).

155) M. Soavi bemerkt in M: גם לא הבנתי מה ר״ל באמרו השברים. Dies bedeutet aber sicher den Flächeninhalt = תשבורת. Zu der Wortform vgl. St. S. 97 Anm. 142 und S. 106 Anm. 180, sowie den Nachtrag zu Ende des St.'schen Werkes [תבריאתא bei R. Chananel s. Migdol Chananel*) S. XXV]. תשבורת findet sich bei A. in der Vorrede zum Ta'ame ha-Luchot ZDMG XXIV S. 359.

156) נקודה = Mittelpunkt, Centrum; vgl. A.'s Einleitung zum Pentateuchkommentar.

157) Vgl. S. ha-Schem Cap. VI Anfang. $3^{1}/_{7}$ führt auch die Mischnat ha-Middot an (v. Abraham bar Chijja, Ed. Steinschneider).

*) Ed. A. Berliner.

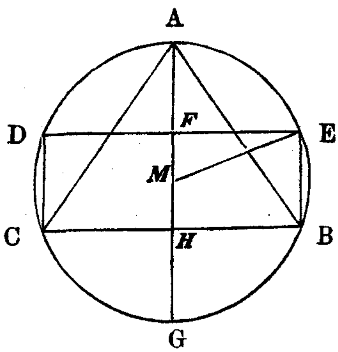
158) S. Anm. 103.

159) Vgl. St. S. 97, wo die abweichenden Angaben über π zusammengestellt sind.

160) $^{62838}/_{20000} = 3^{2838}/_{20000} = 3,1419$. Die Zahl des Ptolemaeus war (s. Anm. 104) 3,141 6666 ....; die Differenz ist also 0,000244 .... Im Sexagesimalbruch ist $^{62838}/_{20000} = 3^0\ 8'\ 30''\ 50'''$, die Differenz ist also nicht, wie in den Hss. steht, $6'''$, sondern $50'''$. Es muss mithin נ' statt ו' heissen.

161) Ihrem Vorzuge verdankt die 10 die folgende Eigentümlichkeit. Im Kommentar zu Ex. 3,15 rühmt A. dies ebenfalls als Vorzug der 10, ebenso im S. ha-Schem S. 12 a. Der Sinn der folgenden Worte והעגול יסובבהו קו אחד ist unklar.

162) S. die Figur und den Beweis hierzu in der Erklärung Josef Schalom's in Zarza's Superkommentar Mekor Chajjim S. 32 a (Ed. Mantua 1559). Hier ist $\pi = {}^{22}/_7 \times 10 = 31^3/_7$.



Behauptung: Viereck BCDE $= 31\,^3/_7$. Beweis: Im rechtwinkligen Dreieck MFE ist $EF^2 = ME^2 - MF^2$. $EF^2 = 25 - {}^{25}/_9 = {}^{200}/_9$. $EF = {}^{10}/_3\sqrt{2}$, $DE = {}^{20}/_3\sqrt{2}$, $BE = {}^{10}/_3$, also Viereck BCDE $= {}^{200}/_9\sqrt{2}$. $\sqrt{2} = 1^0\ 24' \ldots = {}^{84}/_{60} \ldots = {}^{99}/_{70} \ldots$, also Viereck BCDE $= {}^{200}/_9 \times {}^{99}/_{70} = {}^{220}/_7 = 31^3/_7$. — Im Superkommentar Samuel Motot's ist Ed. Venedig 1554 S. 19 c u. d $31^3/_7$ statt $35^3/_7$ zu lesen.

163) (Viereck BCDE)$^2 = {}^{40000}/_{81} \times 2 = {}^{80000}/_{81} = 987^{53}/_{81}$.

164) Mose Soavi bemerkt hierzu: א״מ״ש׳ לא הבנתי מה ר״ל השברים ולא מצאתי פתח להבין ענינו ע״כ דברי משה שואבי וצ״ל׳. Er verstand also die ganze Stelle nicht. — Hierauf folgt in M die Erklärung eines Anonymus mit der Chiffre אמר י״ר, schliessend ע״כ דברי המשיג תם.

165) S. Kerem Chemed II, S. 70 ff., auch S. ha-Schem S. 12 a. Dasselbe zu Ex. 3, 15, bei St. S. 92 unrichtig übersetzt: △ ABC ist nicht gleichseitig, sondern nur gleichschenklig etc. Zu dem Ausdrucke שוק = „Schenkel" vgl. M. Cantor's „Mathematische Beiträge" S. 103. Ein chinesiches Werk [wahrscheinlich vom Kaiser Tschaou-Kong um 1100 v. Chr. Geb.] ist betitelt „Tschaou pi" d. h. „Schenkelbein des Tschaou", indem die einen Winkel bildenden Linien in ähnlicher Weise als Schenkel bezeichnet werden, wie dies später im Griechischen, Lateinischen und Deutschen stattfindet [σκέλος = crus = Schenkel]. Der Name „Schenkel" in seiner geometrischen Bedeutung stammt also vielleicht aus China.

166) Über die doppelte Ausdrucksweise s. Anm. 115 und Motot zu Ex. 3, 15.

167) D. i. $3\,{}^{1849320}/_{12960000} = 3{,}14269\ldots$, also ungenauer als die früheren Angaben (in Anm. 103 und 104).

168) Ist (s. Anm. 162) $ME = {}^{15}/_{2}$, $MF = {}^{5}/_{2}$, so ist $EF^2 = {}^{225}/_{4} - {}^{25}/_{4} = {}^{200}/_{4} = 50$, also $BH = EF = \sqrt{50}$. $AH = 10 = \sqrt{100}$, folglich $\triangle\ ABC = BH \times AH = \sqrt{5000}$.

169) Der Ausdruck בלי תוספות ומגרעת kam in diesem Werke sehr häufig vor, auch im S. ha-'Jbbur gebraucht ihn A. oft (S. 3a oben und unten, S. 5a unten, S. 6b oben, S. 8a unten etc.) Auch Misrachi in seinem S. ha Mispar wendet ihn an (z. B. auf dem viertletzten Blatt der Ed. Constantinopel ויצאו שמנה שלמים בלי תוספת ומגרעת.

170) Die bekannte Methode, welche auch Archimedes in seiner „Kreis-Messung" anwendet, indem er den Umfang des um- und einbeschriebenen 96-Ecks berechnet, zwischen welchen π liegen muss.

171) Diese Stelle ist missverstanden von St. S. 116 [vgl. dagegen St. selbst S. 96 unten] und besonders in ZDMG XXIV S. 340 unten, wo שברים mit „Bruchteile" übersetzt wird.

172) Kreisfläche $= r^2\pi = {}^{22}/_{7}\, r^2 = {}^{11}/_{14} \times 4\, r^2$. Comm. B bemerkt hier, dass das umbeschriebene Quadrat, dessen Fläche $= 4\, r^2$ ist, um ${}^{3}/_{14}$ (des eigenen Flächeninhalts) grösser sei als der Kreis, und fährt dann fort: ורבותי ז״ל שאמרו רביע נמשכו אחר כללם שאמרו כל שיש ברחבו טפח כו׳ [יש בהקיפו ג׳]. „Unsere Lehrer sel. And. nun, welche sagten, [das Quadrat sei um] ${}^{1}/_{4}$ [des eigenen Flächeninhalts grösser als der Kreis], folgten ihrer Regel, die sie im Munde führten: Was im Durchmesser 1 Handbreite hat, u. s. w. [hat in der Peripherie 3 Handbreiten]" (vgl. Traktat אהלות XII, 6 u. ö.).

173) S. Anm. 26 u. 27. Damit kehrt A. wieder zum Anfange seines Werkes zurück.

174) S. Anm. 4.

175) Vgl. denselben Ausdruck im Sefer ha-'Jbbur S. 3a (3. Absatz).

Index

der im S. ha-Mispar vorkommenden Termini.

Abziehen	גרע (מן), חסר (מן)
addieren	חבר (אל, עם, על), הוסיף (על)
Addition	חבור
Arithmetik	חכמת המספר, חכמת החשבון
Arithmetiker	חכמי המספר, חכמי החשבון
Astronomen	חכמי המזלות
Astronomie	חכמת המזלות
Aufgabe	שאלה
ausrechnen	הוציא
ausziehen (z. B. Wurzel)	הוציא
Beispiel	דמיון
Bogen	קשת
Bruch	שבר
Centrum	נקודה
Decimen	עשיריים
Dekade	(מספר) כלל
Differenz	מרחק (מן)
Dividendus	(מספר) המחולק
dividieren	חלק (על)
Division	חלוק
Divisor	(מספר) המחולק עליו
Doppelbruch	שבר השבר
Doppelte	כפל
Dreieck	משולש
Durchmesser	אלכסון
Einer	פרטים, אחדים
Figur	צורה
Flächeninhalt	שברים
ganz	שלם
Geometrie	חכמת המדות
gerade Zahl	מספר זוג
gesucht	מבוקש
gleich	שוה
gleichschenklig	שוה השוקים
Grad	מעלה
herauskommen	עלה, יצא
Kreis	עגול
Messkunde	חכמת המדות
Million	אלף אלפים
Minuten	ראשונים
Mittelpunkt	נקודה
Multiplikation	כפל
multiplizieren	כפל (על)
Musik	חכמת הנגינות
Nenner	מורה
Null	סיפרא, גלגל
Oktaven	שמיניים
Paarzahl	מספר זוג
Peripherie	הקו הסובב
Pfeil	חץ
Primzahl	מספר ראשון
Probe, Probezahl	מאזנים
Produkt	המחובר
Proportion (s. Verhältnis)	ערך
Quadrat	מרובע
Quadratwurzel	שרש מרובע
Quarten	רביעיים
Quinten	חמישיים
Quotient	היוצא בחלוק
rechnen	חשב
Rechnung	חשבון
Rest	הנשאר
Resultat	העולה, היוצא
Schema	דמיון
Schenkel	שוק
Sehne	יתר
Seitenzahl	פאה
Sekunden	שניים
Septimen	שביעיים
Sexten	ששיים
Stelle	מעלה
Sternkunde	חכמת המזלות
Stufe	מעלה
subtrahieren	חסר (מן), גרע (מן)

Subtraktion	הסור. מגרעת
Summe	סכום, מחובר
Teil	חלק
teilen	חלק (על)
Terzen	שלישיים
Überschuss	הוספת, יתרון
überschüssig	נוסף
ungerade Zahl	מספר נפרד
unpaar	נפרד
verdoppeln	כפל
vervielfältigen	כפל
Verhältnis	ערך
arithmetische Verhältnisse	ערכי החשבון
geometrische Verhältnisse	ערכי המדות
harmonische (musikalische) Verhältnisse	ערכי הנגינות
Viereck	מרובע
Wurzel	שרש
Zahl	חשבון, מספר
Zahlenlehre	חכמת החשבון, חכמת המספר
Ziffer	אות, חשבון, מספר
zusammengesetzte Zahl	(מספר) מורכב

Berichtigungen.

Seite
9, Zeile 11 v. u. lies: Überschuss.
20 sind im unteren Rechenschema die Ziffern der Zahl 1930 um eine Stelle nach rechts zu rücken.

	24,	Zeile 4	lies:	Pforte III
	36,	„ 11 v. u.	„	Produkt.
	37,	„ 17	„	152 statt 155.
	59,	„ 3	„	dass.
	66,	letzte Zeile	„	Über-.
	92,	Zeile 18	„	ἀνακυκλεῖ.
	93,	„ 4 v. u.	„	δὲ.
	„	„ 3 „ „	„	ἑαυτήν.
	„	„ „ „ „	„	πεντάκις.
	116,	„ 8	„	הוספת.
Hebr.	1, Noten	„ 5	„	Hs. Medicea.
„	72, „	„ 8	„	übergeschrieben.